Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

"Πες μου και θα το ξεχάσω. Δείξε μου και το θυμάμαι. Βάλε με να το κάνω και θα το καταλάβω."

Κομφούκιος, 450 π.Χ.

3.15 Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει ότι:

$$4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{\Delta B} + 3\overrightarrow{\Delta\Gamma} - 7\overrightarrow{\Delta A}$$

3.19 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα:

$$\vec{u} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{\Gamma M} - 3\overrightarrow{\Delta M} - 6\overrightarrow{MA}$$

είναι ανεξάρτητο του σημείου Μ.

3.17 Δίνονται τα διαφορετικά ανά δύο σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$3\overrightarrow{A\Delta} + 5\overrightarrow{B\Delta} - 8\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{BE} - 4\overrightarrow{\Gamma E}$$

Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΑΒ.

3.20 Θεωρούμε τα διαφορετικά σημεία Α και Β, καθώς και σημείο Γ, για το οποίο ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AB} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.21 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΡΓ = 2ΡΒ. Να αποδείξετε ότι:

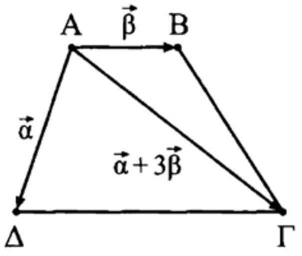
$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Delta} = 2\overrightarrow{BA}$$

3.25 Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E} // \overrightarrow{B\Gamma}$.

3.28 Αν ισχύει ότι $3\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A} = 3\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

3.30 Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ και:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$$



Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο,

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\beta}$.

3.29 Αν ισχύει ότι:

$$2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$$

να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι αντίρροπα.

3.33 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ και Λ τέτοια, ώστε:

$$4\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{B\Gamma} \quad \text{και} \quad 4\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \overrightarrow{A\Gamma} - 3\overrightarrow{B\Gamma}$$

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AK}$ και $\overrightarrow{A\Lambda}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{K\Lambda} // \overrightarrow{B\Gamma}$.

3.34 Αν ισχύει ότι $4\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 9\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

3.37 Αν ισχύει ότι:

$$(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{P\Gamma}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

3.42 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Μ και Ν τέτοια, ώστε $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ και $4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Ν, Δ είναι συνευθειακά.

3.54 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ, Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε:

$$\overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{AK} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Lambda} = 2\overrightarrow{\Lambda\Gamma}$$

Έστω επίσης Μ το μέσο του ΚΛ.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Αν για το σημείο Δ ισχύει ότι:

$$3\overrightarrow{\Delta B} - 4\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 5\overrightarrow{AB}$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Μ, Δ είναι συνευθειακά.

3.52 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της ΒΓ και το μέσο Ν του ΑΜ.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BN}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Για οποιοδήποτε σημείο Κ να αποδείξετε ότι το διάνυσμα:

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma}$$

είναι παράλληλο στο $\overrightarrow{BN}$.

3.64 Αν τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά, να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει:

$$x \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{A\Delta} = x \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + 2\overrightarrow{\Delta B}$$

3.66 Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά διανύσματα. Θεωρούμε επίσης διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει:

$$\frac{1}{2}(2\vec{x} + \vec{\beta}) = \frac{1}{4}(3\vec{x} + \vec{\alpha})$$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}, \quad \overrightarrow{OB} = 4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \quad \text{και}$$

$$\overrightarrow{O\Gamma} = -\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{x}$ **ii)** $\overrightarrow{A\Gamma} \uparrow\downarrow \vec{x}$

3.67 Θεωρούμε γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$|\vec{x} + \vec{\alpha}| \cdot \vec{x} = |\vec{x} + 4\vec{\alpha}| \cdot \vec{\alpha}$$

3.69 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\kappa \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + \lambda \cdot \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{A\Gamma} - 7\overrightarrow{AB}$.

3.70 Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + (\lambda + 1)\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{u} = (\lambda + 2)\vec{\alpha} + (\lambda + 5)\vec{\beta}$$

όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά διανύσματα. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα.

3.76 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

$$\left|3\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{\Gamma B}\right| =$$

$$= \left|3\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{B\Gamma}\right|$$

3.82 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{A\Gamma} - \lambda \cdot \overrightarrow{BM} = (\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{M\Gamma}, \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

3.79 Δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β, Γ του επιπέδου. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$$

3.85 Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο γνωστά μη συγγραμμικά διανύσματα. Θεωρούμε επίσης διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = 4\vec{\alpha} + \vec{\beta} \\ \vec{x} - \vec{y} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \end{cases}$$

α) Να εκφράσετε καθένα από τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$,

ii) το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{y} - \vec{x}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$.

γ) Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$\lambda\vec{x} - \mu\vec{y} = (\mu - 2)\vec{\alpha} + (\lambda + 6)\vec{\beta}$$

3.87 Θεωρούμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda \cdot \overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Delta B} + \lambda \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{0}$$

β) Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχούμε τα διανύσματα:

$$\vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} \quad \text{και}$$

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{M\Delta} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M\Gamma}$$

i) Να βρείτε το πέρας του $\vec{v}$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $\vec{u}$ είναι σταθερό.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

i) είναι συγγραμμικά,

ii) έχουν ίσα μέτρα.

3.83 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της ΒΓ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{M\Gamma}$. Αν Ν είναι το μέσο του ΑΔ, τότε:

α) να γράψετε το $\overrightarrow{MN}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$,

β) να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο, το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{O\Gamma} + 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ είναι ομόρροπο στο $\overrightarrow{MN}$.