

## Συντεταγμένες διανύσματος

Τα καλά μας έρχονται με δυσκολία και μετά από αναζήτηση, ενώ τα κακά και χωρίς να τα αναζητήσουμε.

Δημόκριτος, 470-370 π.Χ.

**4.21** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\lambda, 2\lambda - 4)$ ,  $\vec{\beta} = (\mu, \mu + 6)$  και  $\vec{\gamma} = (7, -1)$ . Να βρείτε για ποιες τιμές των  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $2\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ .

**4.23** Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{a} = (x, x + 4y)$ ,  $\vec{\beta} = (1 - y, y - x)$  και  $\vec{\gamma} = (y, x + y)$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ . Αν τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  είναι ίσα, τότε:

- να βρείτε τους αριθμούς  $x$  και  $y$ ,
- να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (12, -13)$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{\gamma}$ .

**4.26** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$  και  $\vec{\beta} = (y - 2)\vec{i} + (x + 6)\vec{j}$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ , για τα οποία ισχύει  $2\vec{a} - 3\vec{\beta} = (-7, -6)$ .

- Να βρείτε τις τιμές των  $x$  και  $y$ .
- Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = -10\vec{i} + 4\vec{j}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .

**4.30** Δίνονται τα σημεία  $A(-5, -1)$  και  $B(4, 5)$ . Να βρείτε σημείο  $\Gamma$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  τέτοιο, ώστε  $\vec{GB} = 2\vec{GA}$ .

**4.35** Δίνονται τα σημεία:

$$A(\lambda, 2\kappa - 4), \quad B(-2\lambda - \kappa, 3\lambda - \kappa) \quad \text{και}$$

$$M(\kappa, \lambda - 1), \quad \text{με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$  και  $\lambda$ , ώστε το  $M$  να είναι μέσο του  $AB$ .

**4.37** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $A(-1, 3)$ ,  $B(6, 4)$  και  $\Gamma(5, -1)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- του κέντρου  $K$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ ,
- της κορυφής  $\Delta$ .

**4.39** Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $A(1, 5)$  και  $\Delta(3, 9)$ . Έστω επίσης  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Αν είναι  $K(-1, 6)$  και  $\vec{N\Lambda} = (-6, -4)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες:

- των  $N$  και  $\Lambda$ ,
- των  $B$  και  $\Gamma$ ,
- του διανύσματος  $\vec{MK}$ .

**4.40** Δίνονται τα σημεία:

$$A(\lambda, \mu), \quad B(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu), \quad \Gamma(2\mu, 2\mu + 7)$$

$$\text{και } \Delta(\mu, \lambda + 4), \quad \text{με } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Για τα μέσα  $M$  και  $N$  των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα ισχύει ότι  $\vec{MN} = (-5, 2)$ .

- Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$ .
- Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{K\Lambda}$ .

**4.49** Δίνεται το σημείο  $A(3, -1)$ . Να βρείτε σημείο  $B$  του άξονα  $y'y$ , που απέχει από το  $A$  απόσταση 5.

**4.51** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\lambda, 7 - \lambda)$  και  $\vec{\beta} = (1 - \lambda, \lambda - 3)$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  ισχύει  $|\vec{a}| = 13$  και  $|\vec{\beta}| = 10$ .

**4.54** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $A(2, 1)$ ,  $B(3, -2)$  και  $\Gamma(7, -4)$ .

- Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος:

$$\vec{v} = -4\vec{A\Gamma} + 7\vec{B\Gamma}$$

- Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να βρείτε το  $|\vec{AM}|$ .

**4.58** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{a}$  για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\vec{a} = \left( -3, \frac{|\vec{a}| + 3}{2} \right)$$

**4.59** Δίνεται διάνυσμα  $\vec{a}$ , μη παράλληλο στον άξονα  $x'x$ , για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\vec{a} = (4, -2) - |\vec{a}| \cdot (1, -1)$$

Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{a}$ .

**4.60** Δίνονται τα σημεία  $A(x, -2)$ ,  $B(16, x + 2)$  και  $\Gamma(5, x)$ , με  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ισχύει ότι:

$$|2\vec{AB} + 3\vec{B\Gamma}| = |\vec{A\Gamma}|$$

**4.61** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\lambda, -4)$  και  $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 6)$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι  $\vec{a} // \vec{\beta}$ .

**4.64** Τα σημεία  $A, B$  και  $\Gamma$  έχουν διανύσματα θέσης ως προς το  $O$  τα  $\vec{a} = (-1, 9)$ ,  $\vec{\beta} = (5, -3)$  και  $\vec{\gamma} = (1, 5)$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά.

**4.67** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (2, 3)$ ,  $\vec{\beta} = (-10, 2)$  και  $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ . Να βρείτε:

- α) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ ,  
β) τον αριθμό  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα:

$$\vec{\delta} = (\lambda, 1 - \lambda)$$

να είναι παράλληλο στο  $\vec{\gamma}$ .

**4.68** Δίνονται τα σημεία:

$$A(\kappa - 3, -2), \quad B(7 - \kappa, \kappa) \quad \text{και}$$

$$G(\kappa - 6, -11), \quad \text{με } \kappa \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποια τιμή του  $\kappa$ :

- α) το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  είναι παράλληλο στον άξονα  $y'y$ ,  
β) τα σημεία  $A, B, G$  είναι συνευθειακά.

**4.69** Δίνονται τα σημεία  $A(3 - \lambda, \lambda)$ ,  $B(9, 4\lambda)$ ,  $G(3, -7)$  και  $\Delta(1, -4)$ . Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{GD}$ .

**4.83** Δίνονται τα σημεία  $A(\alpha, \beta + 2)$  και  $B(\beta, -2)$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Το σημείο  $A$  ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο, ενώ το διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $-2$  και μέτρο  $3\sqrt{5}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

**4.80** Τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (\kappa, \mu + 4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (\mu, \kappa - 9)$$

με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}^*$ , έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $2$  και  $-3$  αντίστοιχα. Να βρείτε:

- α) τις τιμές των  $\kappa$  και  $\mu$ ,  
β) τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος:

$$\vec{\gamma} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta}$$

Δίνεται διάνυσμα  $\vec{a}$ , μη παράλληλο στον  $x'x$ , για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot (1, -1) - (2, -1)$$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του  $\vec{a}$ .  
β) Να βρείτε διάνυσμα  $\vec{\beta}$  που είναι αντίρροπο του  $\vec{a}$  και έχει μέτρο τριπλάσιο του  $\vec{a}$ .  
γ) Θεωρούμε τα σημεία  $A(\lambda, -2\lambda)$  και  $B(1 - 4\lambda, \lambda + 6)$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν  $\overrightarrow{AB} // \vec{a}$ , τότε να βρείτε:  
i) την τιμή του  $\lambda$ ,  
ii) τις συντεταγμένες του σημείου  $K$  για το οποίο ισχύει  $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{BK}$ .

**4.87** Δίνονται διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$3\vec{a} + 2\vec{\beta} = (-2, 9) \quad \text{και} \quad \vec{a} - 2\vec{\beta} = (10, -5)$$

- α) Να βρείτε τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .  
β) Να γράψετε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (4, 7)$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .  
γ) Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα:

$$\vec{\delta} = (\lambda, 6 - \lambda)$$

να είναι παράλληλο στο διάνυσμα  $\vec{a} - \vec{\beta}$ .

**4.88** Δίνονται διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{a} = (3, -2 - |\vec{\beta}|) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (4 - |\vec{a}|, \sqrt{3})$$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .  
β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\beta}$  με τον άξονα  $x'x$ .  
γ) Αν  $\vec{\gamma} = (\mu, 2 - \mu)$ , να βρείτε το  $\mu \in \mathbb{R}$ , ώστε να είναι  $\vec{\gamma} // \vec{a}$ .

**4.89** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\lambda, \lambda - 5)$  και  $\vec{\beta} = (\lambda - 3, 6)$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τα οποία ισχύει ότι  $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$ .

- α) Να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$ .  
β) Θεωρούμε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 4\vec{a} + 3\vec{\beta}$ .  
i) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  με τον άξονα  $x'x$ .  
ii) Να βρείτε τον  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (\kappa, \kappa - 6)$  να είναι παράλληλο στο  $\vec{\gamma}$ .