Αριθμός *e*: Πανταχού παρών, αν και προερχόμενος από το... υπερπέραν!

Έκανε την εμφάνισή του στον κόσμο των Μαθηματικών σχετικά πρόσφατα – χρειάστηκε μάλιστα χρόνος πριν γίνει αντιληπτό πως είχε ανακαλυφθεί! Και σύντομα βρέθηκε πως, μαζί με κάποιους άλλους αριθμούς, διαθέτει «εξωτικές» ιδιότητες, ανοίκειες αν όχι απρόσιτες για τα δεδομένα της ανθρώπινης εμπειρίας. Αντίθετα όμως από όλους σχεδόν τους άλλους «υπερβατικούς αριθμούς», κάνει αισθητή την παρουσία του, κατά τον έναν ή τον άλλον τρόπο, σε ένα πλήθος πτυχών της ζωής: Από αριθμητικούς υπολογισμούς και σχέσεις της Μαθηματικής Ανάλυσης, έως παροιμιώδεις εκφράσεις της απλής καθομιλουμένης...Και από ζητήματα της Στατιστικής και της Οικονομίας, έως τις βαθυστόχαστες σιβυλλικές θεωρίες της Κβαντικής Φυσικής και της μελέτης του Σύμπαντος...

γράφει ο Κωνσταντίνος Μπενάς

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΥΓΗ ΤΗΣ ΥΠΑΡΞΗΣ ΤΟΥ Ο ΑΝΘΡΩΠΟΣ ΔΕΘΗΚΕ ΣΤΕΝΑ με τις έννοιες και τα βιώματα των αριθμητικών μεγεθών και της διαρκούς μεταβολής των. Διδάχτηκε - από πικρή συχνά πείρα - πως είκοσι αρπακτικά ζώα είναι περισσότερα από δύο, και πως όταν καταναλωθούν τα τέσσερα πέμπτα από τις όποιες προμήθειες το μόνο που απομένει είναι το ένα μόνο πέμπτο - το τελευταίο... Διδάχθηκε πως είναι ζωτικής χρησιμότητας να αναπαριστά τις ποσότητες, τις μεταξύ αυτών σχέσεις και τις διαφοροποιήσεις τους με κατάλληλα σύμβολα, και να κάνει κτήμα του τις ακριβείς ιδιότητες με τις οποίες αυτές υφίστανται, καθώς και τους απαραίτητους χειρισμούς χάρη στους οποίους θα προβλέπει και θα ελέγχει όλα τα παραπάνω. Και τόση ήταν η εξάρτηση της ζωής του από την επιστήμη που προέκυψε κατ' αυτόν τον τρόπο - την επιστήμη των ποσοτήτων, τα Μαθηματικά – ώστε να θεμελιωθεί μία φιλοσοφία του σύμπαντος κόσμου επάνω σε αυτές ακριβώς τις ποσότητες της καθημερινής εμπειρίας - τους *Φυσικούς Αριθμούς* - και τους τρόπους με τους οποίους αυτοί σχετίζονται - τους *Λόγους*.

Η αντικειμενική πραγματικότητα, ωστόσο, «κέλευε άλλα». Οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι, οι πιστοί της «κοσμικής αρμονίας», εργαζόμενοι ακριβώς με τους κανόνες των αναλογιών (όμοια τρίγωνα) έκαναν τη μοιραία διαπίστωση ότι η εικόνα αυτή του κόσμου, την οποία είχαν ενστερνισθεί, ήταν μία αυταπάτη. Η δική τους διάσημη σχολή ήταν εκείνη ακριβώς που απέδειξε θεωρητικά κάτι που ήταν μόνο εμπειρικά γνωστό, έως τότε, στην περιοχή της εγγύς Ανατολής (Αίγυπτος – Βαβυλωνία): Το πασίγνωστο θεώρημα που φέρει την ονομασία της μέσα στους αιώνες, «το τετράγωνο της υποτεινούσης ορθογωνίου τριγώνου…» Και το θεώρημα αυτό σφράγισε τη γέννηση μίας τελείως νέας αντίληψης για τον κόσμο στη θέση εκείνης που είχε επικρατήσει εξ αιτίας της πρωτογενούς εμπειρίας των φυσικών αισθήσεων.

Πράγματι, ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες προς μία μονάδα μήκους (όποια και αν είναι αυτή) έχει υποτείνουσα ίση με την τετραγωνική ρίζα του 2 $\left(\sqrt{2}\right)$. Σε αυτό το συμπέρασμα οδηγούν αναπόδραστα οι λόγοι των ακεραίων αριθμών και οι ιδιότητές τους, οι ίδιοι δηλαδή οι «θεμέλιοι λίθοι» της Σχολής των Πυθαγορείων. Δεν επιδέχεται αμφιβολία: Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ένα μέγεθος που υπάρχει στη φύση! Χειροπιαστό! Ίσο με το μήκος της πέρα για πέρα πραγματικής και απτής πλευράς ενός τριγώνου! Όπως δεν επιδέχεται αμφιβολία και ένα άλλο συμπέρασμα, επίσης βασιζόμενο στις ιδιότητες των λόγων, αλλά πολύ πιο επιβλητικό: Ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ίσος *με κανέναν ακέραιο αλλά και με κανέναν λόγο ακεραίων!* Όλη η πίστη της Σχολής των Πυθαγορείων βασιζόταν σε κάτι το οποίο τώρα γκρεμιζόταν με πάταγο… Τόση ήταν η πεποίθηση των μαθητών του Σάμιου φιλοσόφου στην αρχή που ήθελε τα πάντα μέσα στο σύμπαν να αποτελούνται από ακέραια μεγέθη και λόγους τέτοιων μεγεθών και το ίδιο το σύμπαν να είναι αποκύημα μίας παρόμοιας αρμονικής διαίρεσης του πρωταρχικού Ενός, ώστε και αυτές τις πλευρές των γεωμετρικών σχημάτων τα οποία σχεδίαζαν τις κατασκεύαζαν όχι σαν συνεχείς ευθείες γραμμές αλλά με διαδοχικές ψηφίδες ή λίθους. Το αντίθετο λέγεται πως εθεωρείτο έως και βλασφημία προς την κοσμική αρμονία…

Ωστόσο, αν και οδήγησε σε τεράστια κρίση τη Σχολή των Πυθαγορείων, η πρώτη αυτή ανακάλυψη ενός από τους *Άρρητους* ή *Ασύμμετρους Αριθμούς* δεν φάνηκε να οδηγεί σε αποξένωση από τον κόσμο των φυσικών εμπειριών ή από τις εποπτικές δυνατότητες της ανθρώπινης νόησης, η οποία μόνο τα πολύ συγκεκριμένα αριθμητικά μεγέθη (ένα αυτοκίνητο, πέντε δέντρα, μισό μήλο, $\frac{6}{8}$ του χιλιόγραμμου ελαιόλαδο…) είναι σε θέση να αφομοιώσει. Πράγματι, αρκεί να πολλαπλασιάσει κανείς τον $\sqrt{2}$ με τον εαυτό του, και αμέσως αυτός μετατρέπεται στον αριθμό 2 επιστρέφοντας θριαμβευτικά στο οικείο βασίλειο των ακεραίων. Μικρό, επομένως, το κακό! Ναι μεν ο $\sqrt{2}$ είναι «άρρητος», είναι όμως άρρηκτα δεμένος με τους *Ακεραίους* και τους *Ρητούς Αριθμούς*. Η ιδιότητά του ως αρρήτου δεν είναι παρά ένα είδος «παθολογικής συμπεριφοράς» – μία «ιδιοτροπία» η οποία θεραπεύεται με έναν απλό πολλαπλασιασμό.

Με τον καιρό διαπιστώθηκε πως και πολλοί άλλοι άρρητοι αριθμοί «επανέρχονταν στην τάξη» (ήτοι στους κόλπους των ακεραίων και ρητών) με απλή εφαρμογή των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής: Πολλαπλασιασμών, διαιρέσεων, προσθαφαιρέσεων. Ήταν δηλαδή *Αλγεβρικοί Αριθμοί*: Καθένας τους ικανοποιούσε κάποια *Αλγεβρική Εξίσωση*, ήτοι μία εξίσωση με ρητούς αριθμούς ως συντελεστές, στην οποία ο «άγνωστος x » υπεισέρχεται ως άθροισμα δυνάμεών του πολλαπλασιασμένων με τους συντελεστές αυτούς, ενώ η όλη παράσταση εξισώνεται με κάποιον ακέραιο ή ρητό, εκείνον ακριβώς στον οποίο οδηγείται ο - άρρητος, έστω - αλγεβρικός αριθμός ύστερα από τη διαδικασία που περιγράψαμε. Ήταν, επομένως, αλήθεια πως οι περισσότεροι άρρητοι πλην αλγεβρικοί αριθμοί χρειάζονταν πολύ πιο σχολαστική «θεραπεία» από την απλή ύψωσή τους στο τετράγωνο, απαιτώντας ενδεχομένως μία μακρά σειρά κοπιαστικών υπολογισμών. Το αποτέλεσμα, ωστόσο, ήταν το επιθυμητό: Οι τέσσερεις πράξεις της Αριθμητικής αρκούσαν για να «εξορκίσουν το φάντασμα» των ποσοτήτων εκείνων που είναι τελείως ξένες στην ανθρώπινη εμπειρία, και απρόσιτες από αυτήν…

Ε Ν Θ Ε Τ Ο 1

Μία αλγεβρική εξίσωση είναι μία εξίσωση της μορφής:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \quad \dots \quad a_2 x^2 + a_1 x \quad a_0 \quad 0$, όπου οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι είτε *ακέραιοι*, είτε *ρητοί* - έχουν, δηλ., τη μορφή $\frac{m}{n}$ για m, n ακεραίους. (Στην πραγματικότητα είναι δυνατόν να θεωρήσουμε όλους τους συντελεστές ως ακεραίους, δεδομένου ότι, στην αντίθετη περίπτωση, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των συντελεστών.

Είναι προφανές πως όταν ένας αριθμός x ικανοποιεί μία τέτοια εξίσωση, τότε ύστερα από μία σειρά πολλαπλασιασμούς με τον εαυτό του (έως την $n-$ οστή δύναμη) και με τους συντελεστές $a_1, a_2, \dots, a_n$, καθώς και με άθροιση των εξαγομένων, καταλήγει στον αντίθετο του «σταθερού όρου» a_0, ήτοι σε έναν ακέραιο ή ρητό αριθμό. Οι αριθμοί που έχουν αυτήν την «καλή» ιδιότητα είναι οι *Αλγεβρικοί Αριθμοί*.

Δεν είναι όμως οι μοναδικοί που υπάρχουν. Οι *Υπερβατικοί Αριθμοί* είναι εκείνοι που δεν οδηγούν ποτέ σε κανέναν ακέραιο ή ρητό, σε όποια δύναμη και αν υψωθούν, όσο και αν πολλαπλασιαστούν με ακεραίους ή ρητούς αριθμούς, και με όποιον τρόπο

Η ανακάλυψη του *e*.

Η πραγματικότητα όμως επεφύλασσε και άλλες εκπλήξεις. Οι αριθμοί που είναι είτε ρητοί, είτε έχουν την παραπάνω «ανεκτή», έστω, συμπεριφορά, όχι απλά δεν είναι οι μοναδικοί, αλλά αποτελούν «μηδαμινή» εξαίρεση. Η «μεγάλη πλειονότητα» των αριθμών αποδεικνύεται πως διαφεύγει τελείως από τις εμπειρικές δυνατότητες του ανθρώπινου νου. Ας πάρουμε τα πράγματα με τη σειρά:

Πιθανότατα όλοι έχουμε ακουστά τους *Λογαρίθμους*. Όταν ένας αριθμός x είναι δυνατόν να παρασταθεί ως η δύναμη ενός άλλου αριθμού y, λαμβάνοντας υπ' όψη ενδεχόμενους περιορισμούς όσον αφορά, π.χ., το πρόσημο του πρώτου, τότε η δύναμη αυτή είναι ο *Λογάριθμος του* x *με βάση τον* y $\left(\log_y x\right)$. Οι πρώτοι λογάριθμοι τους οποίους διδάσκεται κανείς στο σχολείο είναι οι *Δεκαδικοί Λογάριθμοι*, με βάση τον αριθμό 10, τη μεγαλύτερη όμως σπουδαιότητα έχουν οι *Φυσικοί Λογάριθμοι* οι οποίοι απέκτησαν την ονομασία τους (*«Logarithmus Naturalis»*) από τον Ιταλό μαθηματικό και κληρικό Pietro Mengoli (1626 – 1686) την οποία υιοθέτησε και ο Δανός, επίσης μαθηματικός, Nicolaus Mercator (1620 - 1687) στο έργο του *«Logarithmotechnia»*, το έτος 1668[1]. Οι λογάριθμοι αυτοί είχαν επινοηθεί νωρίτερα από τον Σκώτο μαθηματικό John Napier (1550 – 1617) ο οποίος όμως, όπως και ο Mercator και πολλοί άλλοι σύγχρονοι ή και μεταγενέστεροι, δεν αντελήφθη ποτέ την κεφαλαιώδη σημασία της βάσης τους. Στην πραγματικότητα ο Napier, ο οποίος εισήγαγε τον όρο «λογάριθμος», αντιλαμβανόταν τα μεγέθη αυτά με διαφορετικό τρόπο από ό,τι ισχύει σήμερα, σε σχέση αποκλειστικά με τους υπολογισμούς με τριγωνομετρικούς αριθμούς και τις ιδιότητες των τελευταίων. Η εργασία του με τίτλο *«Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio»* εκδόθηκε στα 1614 (Εδιμβούργο), στα Λατινικά, μεταφράστηκε στα Αγγλικά από τον Edward Wright και εκδόθηκε στη γλώσσα αυτή στα 1616 (Λονδίνο) με τίτλο «Description of the Admirable Table of Logarithms» (Περιγραφή του Θαυμαστού Πίνακα των Λογαρίθμων). Σε επανέκδοσή της στα 1618 συνοδευόταν από ανυπόγραφο παράρτημα, η σύνταξη του οποίου αποδίδεται στον Βρετανό μαθηματικό William Oughtred, και στο οποίο έκανε για πρώτη φορά την εμφάνισή του ο αριθμός e.

Ούτε ο συμβολισμός του διάσημου αριθμού ούτε η συνειδητοποίηση της ύπαρξής του υπάρχουν στην έκδοση αυτή του *«Descriptio»*, και ούτε επρόκειτο να υπάρξουν σχεδόν για έναν ακόμα αιώνα. Ο αριθμός e εμφανίζεται μόνον «σιωπηρά» στο παραπάνω σύγγραμμα, μέσω του κατά προσέγγιση υπολογισμού από τον Oughtred των (φυσικών) λογαρίθμων ορισμένων αριθμών - η εκτίμηση για εκείνον του 10, π.χ., είναι 2,302584. Στα 1624 ο Henry Briggs, καθηγητής της Γεωμετρίας στο Gresham College του Λονδίνου εκδίδει την *«Arithmetica Logarithmica»* όπου αυτή τη φορά γίνεται υπολογισμός του λογαρίθμου του αριθμού e με βάση το 10.

Η επόμενη εμφάνιση του αριθμού e στην Ιστορία των Μαθηματικών - χωρίς και πάλι να γίνει αντιληπτό περί τίνος επρόκειτο - έλαβε χώρα στα 1647, με τον υπολογισμό από τον ιησουίτη μαθηματικό Grégoire de Saint - Vincent (1584 – 1667) του εμβαδού της επιφανείας κάτω από τη γραφική παράσταση μίας «Ορθογώνιας Υπερβολής» («Rectangular Hyperbola») με εξίσωση $y = \dfrac{1}{x}$. Οι διαπιστώσεις του από τον υπολογισμό αυτόν έχουν άμεση σχέση με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, ενώ ο αριθμός e υπεισέρχεται κατά ουσιώδη τρόπο, δεδομένου ότι το μέρος της παραπάνω επιφάνειας με εμβαδόν ίσο με 1 είναι ακριβώς εκείνο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της υπερβολής, τον άξονα των X (Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) και τις κάθετες στον τελευταίο στα σημεία του $x = 1$ και $x = e$. Το τελευταίο είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με τον ορισμό του φυσικού λογαρίθμου ως το αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{1}{x}$, και την ισότητα του ορισμένου ολοκληρώματος μίας συνάρτησης με το εμβαδόν της επιφάνειας υπό τη γραφική παράσταση της, σύμφωνα με τον Απειροστικό Λογισμό, έχει δε σαν συνέπεια το γεγονός ακριβώς ότι ο e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων.

Δεν είναι σαφές αν ο Saint - Vincent συνειδητοποίησε τη σύνδεση των υπολογισμών του με τους λογαρίθμους, και προφανώς δεν ήταν απαραίτητο να δει καθαρά τον αριθμό e και τη σημασία του. Ωστόσο, στα 1661 έγινε ένα ακόμα βήμα με την ανακάλυψη από τον Ολλανδό φυσικομαθηματικό και αστρονόμο Christian Huygens (1629 - 1695) της σχέσης του εμβαδού της επιφάνειας υπό την ορθογώνια υπερβολή με τους λογαρίθμους. Ο Huygens έδωσε επίσης τον ορισμό της «Λογαριθμικής Καμπύλης», ενός μαθηματικού αντικειμένου στενά συνδεδεμένου με τον αριθμό e μέσω της «Εκθετικής Συνάρτησης»· ουσιαστικά η λογαριθμική καμπύλη είναι μία μορφή της συνάρτησης αυτής, αν και η ονομασία της παραπέμπει στην συνεπόμενη στενή σχέση της με τους φυσικούς λογαρίθμους. Με βάση την λογαριθμική καμπύλη ο Huygens υπολόγισε τα 17 πρώτα ψηφία του λογαρίθμου του e με βάση το 10, χωρίς όμως πάλι να επισημάνει και να ξεχωρίσει αυτόν καθεαυτό τον διάσημο αριθμό μέσα στους τύπους του· άλλωστε και ο υπολογισμός του νοήθηκε τότε ως ο προσδιορισμός μίας σταθεράς, και όχι γενικότερα ως η τιμή ενός λογαρίθμου.

Ο πρώτος που απομόνωσε, στα 1683, τον αριθμό e, υπολογίζοντας μία πρώτη προσέγγιση της τιμής του, ήταν ο Ελβετός μαθηματικός Jacob Bernoulli (1654 -1705). Αντίθετα όμως από τους προηγούμενους η εργασία του δεν είχε σαν αφορμή τους λογαρίθμους - ούτε ο ίδιος ο Bernoulli αντιλήφθηκε τη σύνδεση που υπήρχε με αυτούς - αλλά αφορούσε τον υπολογισμό του ανατοκισμού. Ο Bernoulli χρειάστηκε προς τούτο να υπολογίσει το όριο μίας συγκεκριμένης ακολουθίας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ όταν η μεταβλητή της τείνει στο άπειρο, αποδεικνύοντας κατ' αρχήν ότι το όριο αυτό υπάρχει και ευρίσκεται μεταξύ του 2 και του 3. Και όπως είναι σήμερα γνωστό, αυτό ακριβώς το όριο είναι ένας από τους ορισμούς του αριθμού e! Οπωσδήποτε ήταν ο επίσης μαθηματικός αδελφός του Johann Bernoulli (1667 - 1748) εκείνος ο οποίος, με το έργο του *«Principia calculi exponentialium seu percurrentium»* (1697) εγκαινίασε τη συστηματική μελέτη των εκθετικών συναρτήσεων.

Ο αριθμός e εμφανίζεται για πρώτη φορά ως αυτό που πραγματικά είναι σε επιστολές του πολυμαθούς Γερμανού και ιδρυτή του Απειροστικού Λογισμού (μαζί με τον Νεύτωνα) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) προς τον Huygens, κατά τα έτη 1690 - '91. Για την παράστασή του ο Leibniz χρησιμοποιούσε το «b». Το σύμβολο e εισήχθη στα 1731 από τον επίσης Ελβετό φυσικομαθηματικό Leonhard Euler, ο οποίος αναγνωρίζεται, κατά κάποιο τρόπο, ως ο «πατέρας» του αριθμού e - ο τελευταίος αποκαλείται ενίοτε και «αριθμός του Euler»[2]. Και είναι γεγονός ότι στον Euler οφείλονται, εκτός από ένα πλήθος σχέσεις που αφορούν τον διάσημο αριθμό, συνδέοντάς τον με άλλες κεφαλαιώδεις σταθερές και συναρτήσεις των μαθηματικών, και ο υπολογισμός του e έως το 18^o δεκαδικό ψηφίο, η παράσταση της διάσημης σταθεράς με «άπειρη σειρά» (όριο αθροίσματος, όταν το πλήθος των όρων του τείνει στο άπειρο) ο προσδιορισμός της παράστασης $\frac{e-1}{2}$ υπό μορφή «συνεχούς κλάσματος» (κλάσματος του οποίου ο παρονομαστής είναι το άθροισμα μίας σταθεράς και ενός άλλου συνεχούς κλάσματος, διαδικασία η οποία νοείται ως συνεχιζόμενη επ' άπειρον) και, σύμφωνα με ορισμένες εκτιμήσεις, και η απόδειξη πως ο e είναι άρρητος αριθμός, ήτοι, όπως και ο $\sqrt{2}$, δεν είναι δυνατόν να παρασταθεί υπό μορφή λόγου ακεραίων όρων.

Η σημαντικότερη εξέλιξη σχετικά με τον e ήταν η απόδειξη ότι είναι ένας *Υπερβατικός Αριθμός (Transcendental Number)*. Κάτι πολύ πιο μυστηριώδες - αν όχι και επώδυνο - για την ανθρώπινη εμπειρία και τον «κοινό νου», από ότι οι «αθώοι» άρρητοι πλην αλγεβρικοί αριθμοί! Η εν λόγω απόδειξη δόθηκε στα 1873 από τον Γάλλο μαθηματικό Charles Hermite (1822 - 1901) και η σύντομη αναφορά μας στην κατάκτηση αυτή του ανθρώπινου πνεύματος είναι μία καλή αφορμή για να εξετάσουμε εν συντομία τι ακριβώς είναι οι υπερβατικοί αριθμοί, και ποια η σημασία τους στην κατανόηση του κόσμου.

Οι υπερβατικοί αριθμοί.

Είδαμε νωρίτερα πως ορισμένοι αριθμοί, με πρώτον χρονολογικά τον $\sqrt{2}$, διαπιστώθηκε πως δεν είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν ούτε στους ακεραίους, ούτε, γενικότερα, στους λόγους των τελευταίων, τους ρητούς αριθμούς. Στη δεκαδική τους μορφή οι αριθμοί αυτοί - οι άρρητοι - εμφανίζονται με άπειρα το πλήθος ψηφία μετά την υποδιαστολή, τα οποία εμφανίζονται το ένα μετά το άλλο κατά τελείως απρόβλεπτο τρόπο, «στην τύχη» θα έλεγε κανείς, χωρίς να υπάρχει κανένας τρόπος να προβλεφθεί επόμενο άγνωστο ψηφίο με βάση είτε τα προηγούμενα γνωστά, είτε κάποιον άλλον κανόνα σχετικό με τον συγκεκριμένο αριθμό. Αυτό δεν ισχύει για τους ρητούς: Ο κάθε ένας από αυτούς ή έχει πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ή, στη χειρότερη περίπτωση, ένα ορισμένο πλήθος από δεκαδικά ψηφία («περίοδος») διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία *επαναλαμβάνονται* μεν επ' άπειρο από ένα σημείο και έπειτα, διαρκώς όμως *τα ίδια*, με την *ίδια σειρά*. Π.χ. ο $\frac{1}{2}$ σε δεκαδική μορφή γράφεται $0{,}5$, ο $\frac{1}{9}$ γράφεται $0{,}111111111...$ (περίοδος 1) ο $\frac{5}{7}$ γράφεται $0{,}714285\ 714285\ 714285...$(περίοδος 714285) ο $\frac{13}{42}$ γράφεται $0{,}30\ 952380\ 952380\ 952380...$ (περίοδος 952380, εμφανιζόμενη μετά τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία) κ.ο.κ. Προκειμένου για τον $\sqrt{2}$ όμως η παράστασή του, μέχρι το 65^{o} δεκαδικό ψηφίο έχει τη μορφή:

$$1.41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 24209\ 69807\ 85696\ 71875\ 37694\ 80731\ 76679$$

ενώ ο υπολογισμός έτι περισσοτέρων ψηφίων αποτελεί πρόκληση για πολλούς μεταπτυχιακούς φοιτητές, ταλαντούχους προγραμματιστές υπολογιστών και γενικά όσους επιθυμούν να κάνουν αισθητή την παρουσία τους είτε υπερβαίνοντας απλά το μέχρι τώρα γνωστό πλήθος ψηφίων, είτε επινοώντας τελειότερες τεχνικές για τον υπολογισμό[3].

Εν τούτοις ορισμένοι άρρητοι όπως ο $\sqrt{2}$ επανέρχονται, όπως αναφέραμε ήδη, στη χωρία των ρητών αριθμών ύστερα από απλές αριθμητικές πράξεις, έστω και επίπονες. Το ερώτημα, ωστόσο, αν αυτό είναι εφικτό με κάθε άρρητο αριθμό είχε απασχολήσει τη μαθηματική κοινότητα από παλιά. Οι άρρητοι εκείνοι αριθμοί που στερούνται αυτής της «καλής ιδιότητας» ονομάστηκαν *Υπερβατικοί Αριθμοί (Transcendental Numbers)* όρος ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Leibniz σε έγγραφό του χρονολογούμενο από το 1682, σε σχέση όχι με κάποιον αριθμό αλλά με μία συνάρτηση και συγκεκριμένα το ημίτονο, ενώ ο ορισμός των υπερβατικών αριθμών δόθηκε για πρώτη φορά, κατά πάσα πιθανότητα, από τον Euler. Το ζήτημα του αν υπάρχουν ή όχι τέτοιου είδους αριθμοί λύθηκε κατ' αρχήν στα 1844, από τον Γάλλο μαθηματικό Joseph Liouville (1809 – 1882) ο οποίος κατασκεύασε τους πρώτους αποδεδειγμένα υπερβατικούς αριθμούς, τους *Αριθμούς Liouville*· σε πολύ απλή γλώσσα ένας αριθμός Liouville ορίζεται από την ιδιότητα που έχει να προσεγγίζεται πάντα από κάποιον ρητό αριθμό σε «απόσταση» μικρότερη από τυχαία δύναμη του αντιστρόφου του παρονομαστή του συγκεκριμένου ρητού.

Ιδού λοιπόν: Οι υπερβατικοί αριθμοί κατέστησαν πλέον μία αναπόδραστη πραγματικότητα…Αριθμοί οι οποίοι είναι, κάποιον τρόπο, αδύνατον να γίνουν αντιληπτοί, να κατανοηθούν, από τον ανθρώπινο νου. Αδύνατον ακόμα και να «επικοινωνήσουν» μαζί του. Πράγματι, ο τελευταίος είναι σε θέση να αφομοιώσει εκείνες μόνο τις ποσότητες οι οποίες σχετίζονται με τα εμπειρικώς προσιτά μεγέθη του φυσικού κόσμου που τον περιβάλει. Οι δυνατότητές του για κάτι τέτοιο σταματούν αναγκαστικά στους ρητούς, ήδη αρκετά δυσπρόσιτους στις περισσότερες περιπτώσεις, π.χ. όταν πρέπει να παρασταθούν με άπειρα δεκαδικά ψηφία, ιδιαίτερα εκείνοι των οποίων η «περίοδός» είναι αρκετά μεγάλη. Όσο για τον $\sqrt{2}$ και τους άλλους αρρήτους αλγεβρικούς αριθμούς, αυτοί είναι αδύνατον να νοηθούν με βάση τα μεγέθη της καθημερινής πραγματικότητας. Το μόνο απτό που έχει στη διάθεσή της η ανθρώπινη αντίληψη είναι οι άπειροι το πλήθος ρητοί οι οποίοι αποτελούν ολοένα καλύτερες προσεγγίσεις των αρρήτων, χωρίς όμως ποτέ να ταυτίζονται με κανέναν. Ο $\sqrt{2}$, για παράδειγμα είναι δυνατόν να προσεγγισθεί από τον τερατώδη εκείνο συρμό δεκαδικών ψηφίων που αναφέραμε νωρίτερα, ή από άλλους, έτι υπερμεγέθεις, ο ίδιος όμως, αυτός καθαυτός, παραμένει πάντα έξω από τη σφαίρα της εποπτικής αντίληψης. Μία αφηρημένη ποσότητα, ένα «Πλατωνικό», θα έλεγε κανείς, αντικείμενο.

Ωστόσο και εδώ ακόμα υπάρχει κάποια «γέφυρα επικοινωνίας». Οι αλγεβρικοί άρρητοι συνδέονται με τον κόσμο της ανθρώπινης εμπειρίας μέσω των ομώνυμων εξισώσεων τις οποίες ικανοποιούν. Στην περίπτωση των υπερβατικών αριθμών, όμως, δεν υπάρχει ούτε αυτή η γέφυρα. Από την άποψη του κοινού νου, οι υπερβατικοί αριθμοί είναι τελείως απροσδιόριστα μεγέθη, ασύνδετα με την χειροπιαστή πραγματικότητα, «φευγαλέα φαντάσματα», τέτοια ώστε η νόηση δεν είναι σε θέση να γνωρίσει παρά μόνο τους εγγύς αυτών ρητούς. Είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε επαγωγικά πως «κάπου υπάρχουν», είμαστε σε θέση να τους αποδώσουμε κάποια σύμβολα, να προσδιορίσουμε ορισμένους θεωρητικούς κανόνες τους οποίους ικανοποιούν, γνωρίζουμε πως κάποιοι από τους οικείους μας ρητούς ευρίσκονται «αρκετά πλησίον τους»…Από εκεί και πέρα όμως, οι υπερβατικοί αριθμοί είναι πάντα οι «μεγάλοι ξένοι», κάτι σαν θεότητες τις οποίες οι πιστοί λατρεύουν χωρίς ποτέ να έχουν δει!

Φαίνονται ίσως υπερβολικά όλα τα παραπάνω; Ας προσέξουμε το γεγονός ότι οι «υπερβατικοί αριθμοί» ονομάστηκαν με εκείνον ακριβώς τον όρο τον οποίο υιοθέτησε ο μεγάλος Γερμανός φιλόσοφος Εμμανουήλ Καντ προκειμένου να περιγράψει τις έννοιες οι οποίες είναι «απρόσιτες στην ανθρώπινη εμπειρία, η τελευταία όμως δεν είναι σε θέση να τις αποφύγει»[4]. Και ωστόσο πρόκειται για μεγέθη υπαρκτά στη φύση, μεγέθη που σχετίζονται με αντικειμενικά δεδομένα και πραγματικά γεγονότα. Η παρουσία τους στις σχετικές μαθηματικές περιγραφές, ιδιαίτερα εκείνη του e και του άλλου διάσημου υπερβατικού αριθμού, του π, είναι εντυπωσιακά συχνή και με καθοριστική σημασία.

Και το δράμα της ανεπάρκειας του ανθρώπινου νου όσον αφορά την εμπειρική αφομοίωση των αριθμών που υπάρχουν στο σύμπαν δεν σταμάτησε εδώ. Έως τα 1873 οι μόνοι γνωστοί υπερβατικοί αριθμοί - οι μόνοι που ανήκαν εξακριβωμένα σε αυτό το σύνολο - ήταν οι αριθμοί του Liouville, οι οποίοι, σημειωτέον, δεν είχαν ανακαλυφθεί πουθενά στη Φύση συσχετιζόμενοι με φαινόμενα του αντικειμενικού κόσμου, αλλά είχαν σχεδιαστεί και κατασκευαστεί επί τούτου από τον ερευνητή που τους έδωσε το όνομά του, προκειμένου να αποδειχθεί η ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών. Ναι μεν η ανθρωπότητα είχε έρθει αντιμέτωπη με την αλήθεια της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων, ωστόσο απέμενε ακόμα ένα «παραθυράκι»: Οι μόνοι αποδεδειγμένα υπαρκτοί υπερβατικοί αριθμοί ήσαν ανθρώπινο κατασκεύασμα, προϊόντα μίας φαντασίας που «πήγαινε γυρεύοντας» θα έλεγε κανείς, κάτι σαν τα υπερφυσικά όντα που εμφανίζονται σε μία νουβέλα τρόμου χωρίς καμία σχέση με τον κατά πολύ ευγενέστερο και αρμονικότερο αληθινό κόσμο. Ο τελευταίος όμως δεν θέλησε και πάλι να δικαιώσει τις ελάχιστες αυτές ελπίδες που απέμεναν. Στα 1873, και ενώ ο Euler και άλλοι είχαν ήδη αποκαλύψει όχι μόνο τη σύνδεση με την αντικειμενική πραγματικότητα αλλά και την τεράστια σημασία του αριθμού e για αυτήν, ο Γάλλος μαθηματικός Charles Hermite (1822 – 1901) ήρθε να αποδείξει ότι η διάσημη αυτή σταθερά είναι επίσης ένας υπερβατικός αριθμός. Ο πρώτος που δεν είχε κατασκευαστεί επίτηδες ως τέτοιος, αλλά ήταν από παλιά διαπιστωμένα υπαρκτός αφού στο μεταξύ είχε συνειδητοποιηθεί η σχέση του με τους φυσικούς λογάριθμους του Napier, με το όριο της ακολουθίας που είχε υπολογίσει ο Bernoulli, και με όλα τα άλλα που προαναφέραμε. Και ακολούθησε στα

1882 η απόδειξη από τον Γερμανό μαθηματικό Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939) ότι και ένας άλλος, διάσημος από την αρχαιότητα και κατά κόρον συνδεδεμένος με «τα της φύσεως» αριθμός, ο π, ήταν επίσης υπερβατικός. Όλοι έπρεπε να το αποδεχτούν πλέον: Οι απρόσιτοι στην ανθρώπινη εμπειρική αντίληψη υπερβατικοί αριθμοί ήταν μέρος του πραγματικού κόσμου, συμμετείχαν σε αυτόν, καθόριζαν τη λειτουργία του...Και μαζί με αυτήν και τις ζωές των ανθρώπων…

Η χαριστική βολή είχε έρθει ωστόσο νωρίτερα, μόλις ένα έτος μετά την απόδειξη του Hermite. Η μετέπειτα απόδειξη του Lindemann ήταν απλά συμβατή με εκείνο το οποίο είχε ήδη διαπιστώσει στα 1874 ο Γερμανός μαθηματικός Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918): Ότι οι υπερβατικοί αριθμοί δεν ήταν απλά υπαρκτοί αλλά και *απείρως περισσότεροι, σε σχέση με όλους τους άλλους*. Ότι, κατά κάποιον τρόπο, *όλοι οι αριθμοί, εκτός «ελαχίστων εξαιρέσεων», είναι υπερβατικοί*! Ή, σε αυστηρότερη μαθηματική γλώσσα: Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι *Αριθμήσιμο*, ενώ εκείνο των υπερβατικών *Υπεραριθμήσιμο*. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι δυνατόν να τεθεί σε μία «ένα προς ένα και επί» αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών, ήτοι με τους $1,2,3,4,5,...,$ ενώ παρόμοια αντιστοίχιση είναι αδύνατη προκειμένου για το σύνολο των υπερβατικών αριθμών. Κάπως απλούστερα: Σε κάθε αλγεβρικό αριθμό είναι δυνατόν αντιστοιχηθεί ένας και μοναδικός φυσικός αριθμός, και αντίστροφα, ενώ για τους υπερβατικούς αυτό είναι ανέφικτο. Με άλλα λόγια, οι φυσικοί αριθμοί «είναι αρκετοί προκειμένου να καταμετρηθούν οι αλγεβρικοί αριθμοί», ενώ, αν και άπειροι το πλήθος, «δεν επαρκούν» για να γίνει το ίδιο όσον αφορά τους υπερβατικούς αριθμούς. Θα μπορούσε να πει κανείς πως το άπειρο των φυσικών, και, μαζί με αυτούς, και των αλγεβρικών αριθμών, είναι «μικρότερο» από εκείνο των υπερβατικών αριθμών - και μάλιστα «απείρως μικρότερο», σύμφωνα με τη συλλογιστική του Cantor (εξ ου και ο ωσάνω χαρακτηρισμός των αλγεβρικών αριθμών ως «ελάχιστες εξαιρέσεις»). Ή και ότι οι υπερβατικοί αριθμοί είναι, με την πλέον απόλυτη σημασία της λέξης, «αμέτρητοι»…

Έτσι η ανθρώπινη σκέψη, αποκομμένη αμετάκλητα από την οικεία αίσθηση των ποσοτήτων και των μεγεθών της καθημερινής εμπειρίας, βρέθηκε αντιμέτωπη με μία πραγματικότητα κορεσμένη από ένα «πανδαιμόνιο» από απρόσιτες σε αυτήν αριθμητικές οντότητες, τις οποίες ούτε να τις αντιληφθεί ούτε να τις κατανοήσει είναι σε θέση. Και το χειρότερο: Όλα τα αριθμητικά μεγέθη στο σύμπαν είναι τέτοιες ακριβώς οντότητες - με «ελάχιστες μόνο εξαιρέσεις». Κατά την ταπεινή άποψη του γράφοντος, η ανακάλυψη των παραπάνω δεδομένων σχετικά με τους υπερβατικούς αριθμούς ίσως να μπορεί να συγκριθεί μόνο με εκείνη της «Αρχής της Απροσδιοριστίας» από τον Werner Heisenberg, αν αναλογισθεί κανείς το πλήγμα που επέφεραν και οι δύο στην πηγαία πεποίθηση για την δυνατότητα του ανθρώπινου νου να συλλάβει τον κόσμο σαν κάτι οικείο με βάση τα δικά του ατελή και περιορισμένα δεδομένα.

Δεν είναι, επομένως, παράδοξο το γεγονός πως το έργο του Cantor συνάντησε - και συναντά και σήμερα - σφοδρή αντίδραση, ακόμα και εχθρότητα, ενώ ο ίδιος αντιμετώπισε έως και κατηγορίες παρόμοιες με εκείνες σε βάρος του Σωκράτη («διαφθορέας των νέων»). Και οι κατηγορίες αυτές προέρχονταν από κορυφές των Μαθηματικών και της Φιλοσοφίας, όπως ο Leopold Kronecker, ο Henri Poincaré, ο Hermann Weyl, ο L. E. J. Brouwer, και ο Ludwig Wittgenstein. Οι θεωρίες του στιγματίστηκαν ως «βαριά ασθένεια» και ο ίδιος ως «τσαρλατάνος της επιστήμης». Υπήρξαν και πολεμικές εναντίον του από την πλευρά των Χριστιανών θεολόγων, δεδομένου ότι τα όσα προέβλεπε οδηγούσαν στην αντίληψη ενός «απείρου από άπειρες το μέγεθος ποσότητες», κάτι που παρέπεμπε στον «πανθεϊσμό» αφού το άπειρο «ταυτίζεται αποκλειστικά με το θείο» - κατά την νοοτροπία πολλών. Ωστόσο ο Cantor βρήκε και ισχυρούς υποστηρικτές, όπως ο David Hilbert - καθηγητής του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή στο Πανεπιστήμιο του Göttingen - ο οποίος διακήρυττε ότι: «Κανείς δεν θα μας εκδιώξει από τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor», ενώ στα 1904 η Βασιλική (Επιστημονική) Εταιρεία του Λονδίνου του απένειμε το μετάλλιο Sylvester, κάνοντάς του την ανώτατη τιμή που αποδίδεται σε κάποιον από το συγκεκριμένο ίδρυμα.

Παρά τις κοσμοϊστορικές διαπιστώσεις του Cantor και την απόδειξη της ταυτότητας του e, του π , και των αριθμών Liouville ως υπερβατικών, παρέμενε ένα ακόμα πρόβλημα, τόσο σημαντικό όσο και παράδοξο… *Ποιοί* ήταν οι άλλοι υπερβατικοί αριθμοί, εκτός των τριών προαναφερθέντων; Οι υπερβατικοί ήταν ο κανόνας, και οι αλγεβρικοί η «μηδαμινή» εξαίρεση, αυτό δεν γινόταν παρά να το παραδεχτούν όλοι. Όμως οι μόνοι εξακριβωμένα γνωστοί υπερβατικοί είναι οι τρεις που γνωρίσαμε ήδη, και ελάχιστοι άλλοι που προστέθηκαν στη συνέχεια. Και η απόδειξη της υπερβατικότητας του καθενός από αυτούς απαιτεί αρκετά μακρές και κοπιώδεις μαθηματικές διαδικασίες. Ιδού λοιπόν ένα ακόμα ακατανόητο δεδομένο: Ο κόσμος «βρίθει» μεν από υπερβατικούς αριθμούς, η ταυτοποίηση κάποιου από αυτούς όμως είναι πράγμα σπάνιο και κάθε άλλο παρά απλό. Οι κυρίαρχοι αριθμοί στο σύμπαν είναι λοιπόν τόσο ακατανόητοι, όσο και κρυφοί!

Για πολλούς από τους γνωστούς αριθμούς είναι δυνατόν να υποπτευθούμε πως είναι υπερβατικοί· μάλιστα θα μπορούσε να πει κανείς πως η ταυτότητά τους είναι οφθαλμοφανής, ωστόσο κάθε αυστηρή απόδειξη πάνω σε αυτό λάμπει δια της απουσίας της, μέχρι στιγμής τουλάχιστον! Τυπικό παράδειγμα οι ποσότητες $e+\pi$, $e\mathrm{X}$, e^{e}, και π^{e}. Ύστερα από όσα ειπώθηκαν προηγουμένως, η πλέον στοιχειώδης διαίσθηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για υπερβατικούς, αυτό όμως δεν έχει αποδειχθεί για κανέναν τους. Αντίθετα, ο αριθμός e^{π} είναι γνωστό πως είναι υπερβατικός, όπως απέδειξε στα 1934 ο Ρώσος μαθηματικός Alexander Osipovich Gelfond (1906 – 1968). Μερικοί άλλοι αριθμοί, αποδεδειγμένα υπερβατικοί, είναι:

- Κάθε δύναμη του e με εκθέτη αλγεβρικό αριθμό, διάφορο του 0
- Κάθε δύναμη με βάση μη μηδενικό αλγεβρικό αριθμό και εκθέτη άρρητο
- Το ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, κλπ., ενός τυχαίου μη μηδενικού αλγεβρικού αριθμού
- Ο φυσικός λογάριθμος ενός τυχαίου αλγεβρικού αριθμού, διάφορου των 0 και 1
- Ο αριθμός $2^{\sqrt{2}}$

Είναι αυτονόητο πως το «αμέτρητο πλήθος» των υπερβατικών αριθμών παραμένει πεισματικά άγνωστο. Σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση του (άνετου!) υπολογισμού ενός απείρου πλήθους υπερβατικών αριθμών αποτελεί η λεγόμενη «Παραδοχή του Schanuel» («Schanuel's Conjecture») η οποία διατυπώθηκε το 1960 από τον Αμερικανό μαθηματικό Stephen Schanuel. Συνέπεια της παραδοχής αυτής, που ανήκει έως σήμερα στη σφαίρα των εικασιών, είναι ότι το άθροισμα $e+\pi$, καθώς και μία σειρά άλλοι αριθμοί που μόνο διαισθητικά μπορούμε να τους χαρακτηρίσουμε ως υπερβατικούς - τυπικά παραδείγματα των οποίων αποτελούν ο φυσικός λογάριθμος κάθε αλγεβρικού αριθμού, ο φυσικός λογάριθμος του π, ο λογάριθμος του λογαρίθμου του π, κ.ο.κ. - είναι όντως τέτοιοι.

Ε Ν Θ Ε Τ Ο 2

Αλγεβρικοί αριθμοί λέγονται εκείνη που ικανοποιούν μία αλγεβρική εξίσωση: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \quad \ldots \quad a_2 x^2 + a_1 x \quad a_0 \quad 0$, όπου οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι ακέραιοι. Το σύνολο όμως των ακεραίων είναι αριθμήσιμο, και το ίδιο ισχύει και για το σύνολο όλων των συνδυασμών n ακεραίων, με το n να λαμβάνει όλες τις τιμές από το 1 έως το άπειρο, ήτοι να διατρέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς («η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο»). Κατά συνέπεια το σύνολο όλων των δυνατών αλγεβρικών εξισώσεων είναι αριθμήσιμο, δεδομένου ότι κάθε αλγεβρική εξίσωση αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε έναν και μοναδικό συνδυασμό n ακεραίων, και αντίστροφα. Δεδομένου ότι κάθε αλγεβρικός αριθμός αντιστοιχεί σε μία και μοναδική αλγεβρική εξίσωση (της οποίας αποτελεί τη λύση) και αντίστροφα, συμπεραίνουμε πως το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Κατά συνέπεια, αριθμήσιμο θα είναι και το υποσύνολο των αλγεβρικών αριθμών που περιέχεται στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, όπου οι a και b είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί με τον περιορισμό ότι ο a είναι μικρότερος ή ίσος του b («ένα υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι επίσης αριθμήσιμο»). Κάθε διάστημα αυτής της μορφής όμως είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα το σύνολο των υπερβατικών αριθμών

Αναφέραμε ήδη πως ο συμβολισμός e ανήκει στον Euler. Υπό τη μορφή αυτή έκανε την εμφάνισή του για πρώτη φορά το 1731, σε επιστολή του διάσημου μαθηματικού προς τον Πρώσο συνάδελφό του Christian Goldbach. Στον Euler οφείλεται επίσης και ο υπολογισμός των πρώτων 18 δεκαδικών ψηφίων της διάσημης σταθεράς: $2,718281828459045235...$ καθώς επίσης και κάποιες προσεγγιστικές μεθόδους για τον υπολογισμό αυτόν. Αυτές συμπεριλαμβάνουν το ανάπτυγμα σε «άπειρη σειρά» και τα «συνεχή κλάσματα», ενώ ο υπολογισμός ως όριο της ακολουθίας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ όταν το n τείνει στο άπειρο πραγματοποιήθηκε, όπως είδαμε, από τον Jacob Bernoulli. Ο τελευταίος, ωστόσο, δεν είχε προσδιορίσει το όριο αυτό ως τη διάσημη σταθερά, οπότε και η τιμή του προσδιορισμού τούτου ανήκει στον Euler. Ενδέχεται πάντως να ήταν ο Bernoulli εκείνος ο οποίος αντελήφθη για πρώτη φορά τη σύνδεση της *Λογαριθμικής Συνάρτησης* με την *Εκθετική Συνάρτηση*, ήτοι με τη συνάρτηση που προκύπτει με την ύψωση κάποιου συγκεκριμένου σταθερού αριθμού («βάσης») σε δύναμη ίση με την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης, προσδιορίζοντας την πρώτη ως αντίστροφη της δεύτερης, και τανάπαλιν. Τα πρωτεία της ανακάλυψης αυτής φαίνεται, ωστόσο πως διεκδικεί και ο Σκώτος αστρονόμος και μαθηματικός James Gregory (1638 - 1675) ο οποίος είχε σαφώς διατυπώσει αυτό το συμπέρασμα στα 1684. Σε κάθε περίπτωση το ζήτημα είχε ήδη αποσαφηνιστεί όταν η σκυτάλη πέρασε στα χέρια του Euler: Η βάση της εκθετικής συνάρτησης ήταν ο αριθμός e ο οποίος ήταν βάση και των φυσικών λογαρίθμων του Napier, ενώ οι δύο συναρτήσεις, εκθετική και λογαριθμική, ήταν αντίστροφες η μία της άλλης.

Είδαμε πως ο e παίζει σημαντικό ρόλο στο πρόβλημα το ανατοκισμού, ως το όριο της προαναφερθείσας ακολουθίας. Πέρα από αυτό, όμως, η παρουσία του στα προβλήματα και τους κανόνες του φυσικού κόσμου και της ανθρώπινης κοινωνίας είναι σχεδόν μόνιμη. Και αυτό γίνεται πραγματικότητα χάρη ακριβώς στην εκθετική συνάρτηση. Όσο όμως απλή και αν ακούγεται η περιγραφή της τελευταίας που δώσαμε πριν λίγες σειρές («ύψωση σταθερής βάσης σε δύναμη ίση με την ανεξάρτητη μεταβλητή») δεν πρέπει να μας παραπλανήσει. Φαίνεται ίσως το απλούστερο πράγμα στον κόσμο το να «υψώσει» κανείς, π.χ., τον αριθμό 2 «στο τετράγωνο», πολλαπλασιάζοντάς τον επί τον εαυτό του. Ή το να υπολογίσει την «τέταρτη δύναμη» του 5, κατασκευάζοντας το γινόμενο $5\times5\times5\times5$. Όπως όμως θα έχει ίσως ήδη αντιληφθεί ο αναγνώστης, αυτό στο οποίο αναφερόμαστε είναι, κατ' αρχήν, η εκθετική και η λογαριθμική *πραγματική*, αλλά και *μιγαδική* συνάρτηση, ήτοι, συναρτήσεις των οποίων η βάση είναι κάποιος *πραγματικός* ή *μιγαδικός* αριθμός, εν γένει, οι δε ανεξάρτητες μεταβλητές αυτών λαμβάνουν ως τιμές επίσης *πραγματικούς* ή μιγαδικούς αριθμούς. Δεν πρόκειται απλά για δυνάμεις με ακεραία βάση και ακεραίους εκθέτες, όπως στην περίπτωση, π.χ., του 5^4. Πώς είναι, λοιπόν, δυνατόν να ορισθούν ποσότητες όπως $2^{e+\sqrt{3}}$, e^{π} κ.ο.κ.; Ή, ακόμα χειρότερα, ποσότητες όπως e^{2i}, e^{3-5i}, κ.ο.κ.; Η απάντηση βρίσκεται στην ιδιαίτερα ξεχωριστή *Φυσική Εκθετική Συνάρτηση*, e^{x} - με βάση τον e και εκθέτη τυχαίο πραγματικό αριθμό - η οποία συχνά καλείται απλά «εκθετική συνάρτηση», όχι αδικαιολόγητα, δεδομένου ότι η εν λόγω συγκεκριμένη περίπτωσή είναι ακριβώς εκείνη που καθορίζει και τη γενική μορφή της συνάρτησης αυτής. Πράγματι, η ύψωση τυχαίας βάσης σε τυχαίο εκθέτη γίνεται πράξη με την ύψωση της βάσης των φυσικών λογαρίθμων σε δύναμη ίση με το γινόμενο του λογαρίθμου της τυχαίας βάσης επί τον δοθέντα εκθέτη.

Η εκθετική συνάρτηση e^x, απαραίτητη η ίδια για τον ανωτέρω ορισμό της γενικότερης της μορφής, είναι δυνατόν να δοθεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Οι συνηθέστεροι είναι η «δυναμοσειρά» (άθροισμα απείρων όρων στους οποίους εμφανίζεται και η μεταβλητή x) το προαναφερθέν όριο του Bernoulli $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ με εμφάνιση και πάλι της μεταβλητής, καθώς και ο κάπως τεχνικός ορισμός της ως η αντίστροφη της λογαριθμικής συνάρτησης.

Ιστορικής σημασίας για τα μαθηματικά υπήρξε η διατύπωση της *Σχέσης του Euler*, η οποία συνέδεσε την μιγαδική εκθετική συνάρτηση με τους βασικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς, ανοίγοντας έτσι το δρόμο για την επέκταση της ανωτέρω θεωρίας στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Η σχέση αυτή χαιρετήθηκε ως η «πλέον διάσημη των Μαθηματικών». Ιδιαίτερο, όμως, θαυμασμό απέσπασε - και όχι μόνο εκ μέρους της μαθηματικής κοινότητας, όπως θα δούμε - μία συγκεκριμένη συνέπεια της, η *Ταυτότητα του Euler*.

Ο αριθμός e είναι μία «διασημότητα» του χώρου των Μαθηματικών, την ιδιότητά του αυτή όμως τη μοιράζεται με ορισμένα άλλα μεγέθη. Τα σημαντικότερα από αυτά - κατά την εκτίμηση πολλών - είναι:

- Οι αριθμοί 0 και 1, ήτοι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αντίστοιχα, στο σώμα των ρητών και στο σώμα των μιγαδικών αριθμών.
- Η «φανταστική μονάδα» i, οριζόμενη από τη γνωστή ιδιότητα: $i^2 = -1$.
- Ο «έτερος διάσημος» υπερβατικός αριθμός π, εμφανιζόμενος και αυτός κατά κόρον στους κανόνες που διέπουν τον φυσικό κόσμο, αλλά και την κοινωνία και την οικονομία.

Σύμφωνα με την αντίληψη ορισμένων, τα παραπάνω μεγέθη συνδέονται συμβολικά με τους θεμελιώδεις κλάδους των Μαθηματικών. Οι 0 και 1, για παράδειγμα, συμβολίζουν την Αριθμητική. Η φανταστική μονάδα i την Άλγεβρα. Ο π τη Γεωμετρία, ο e, τέλος την Ανάλυση. Και η ταυτότητα το Euler συνδέει αυτά τα μεγέθη - και μαζί με αυτά, υποτίθεται, και τους αντίστοιχους κλάδους! - σε μία ιδιαίτερα συμμετρική και καλαίσθητη σχέση, στην οποία μάλιστα κάνουν επίσης την εμφάνισή τους - από μία ακριβώς φορά εκάστη – οι θεμελιώδεις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, και της ύψωσης σε δύναμη, καθώς και το σύμβολο της ισότητας. Ένα πραγματικό «προσκλητήριο συμβολισμών»!

Η ταυτότητα του Euler επιβραβεύθηκε με έναν πραγματικό θησαυρό από εκφράσεις θαυμασμού: «Το πλέον υπέροχο θεώρημα των Μαθηματικών», «η μεγίστη των εξισώσεων όλων των εποχών», «το χρυσό πρότυπο σύγκρισης της μαθηματικής ομορφιάς», «ο πλέον διάσημος τύπος όλων των Μαθηματικών», ήταν μερικοί μόνο από αυτούς, ενώ ο κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss διετύπωσε την άποψη πως «αν η σημασία της ταυτότητας του Euler δεν ήταν άμεσα προφανής σε έναν φοιτητή των Μαθηματικών, τότε αυτός δεν θα διέπρεπε ποτέ σε αυτή την επιστήμη»! Το γεγονός ότι συνδέει μεταξύ των τους θεμελιώδεις αριθμούς και κλάδους των Μαθηματικών οδήγησε ακόμα και στην αναζήτηση βαθύτερων «απόκρυφων» νοημάτων. Όπως έλεγε ο κορυφαίος Αμερικανός μαθηματικός του 19ου αιώνα, και καθηγητής του Harvard, Benjamin Peirce:

«Το ότι ο τύπος είναι σωστός είναι απολύτως παράδοξο. Δεν είμαστε σε θέση να τον αντιληφθούμε και δεν γνωρίζουμε τη σημασία του, όμως τον έχουμε αποδείξει και επομένως γνωρίζουμε πως πρέπει να είναι αληθής!»

Η γενικότερη σημασία της εκθετικής συνάρτησης για τη μελέτη της Φύσης και της Κοινωνίας είναι οπωσδήποτε ακόμα μεγαλύτερη. Υπεισέρχεται σε πλήθος κλάδων της επιστήμης, θεωριών, νόμων, σχέσεων… Εμφανίζεται ακόμα και σε παροιμιώδεις ρήσεις που έχουν εισχωρήσει έως και την καθομιλουμένη. Πράγματι, ίσως έχουμε όλοι ακούσει κάποτε να γίνεται λόγος για «εκθετική αύξηση» κάποιου μεγέθους, πράγμα που υποδηλώνει μία τεράστια, εκρηκτική αύξηση. Η έκφραση έχει τις ρίζες της στην αξιοσημείωτη ιδιότητα - μία από τις πολλές! - της e^x να αυξάνεται με ταχύτερο ρυθμό από κάθε αλγεβρική, τριγωνομετρική, ή άλλη συνήθη συνάρτηση. Μάλιστα, είναι ακριβώς μία εκθετική συνάρτηση εκείνη η οποία περιγράφει την κατακλυσμική αύξηση των διαστάσεων του σύμπαντος κατά την «πληθωριστική φάση», μόλις μερικά απειροστά του δευτερολέπτου μετά τη «Μεγάλη Έκρηξη». Ας επιχειρήσουμε μία σύντομη απαρίθμηση μερικών από τις σημαντικότερες εμφανίσεις της διάσημης συνάρτησης.

Χαρακτηριστική της συχνότητας με την οποία η e^x εμφανίζεται στη Φύση είναι η *Λογαριθμική Έλικα* - αν και η ονομασία που θα ανέμενε κανείς για αυτήν θα ήταν ίσως «εκθετική έλικα». Η καμπύλη αυτή, γνωστή ήδη από την εποχή του Γαλιλαίου, προκύπτει αν η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης σχεδιαστεί με χρήση όχι «καρτεσιανών συντεταγμένων», οι οποίες αντιστοιχούν στις αποστάσεις πάνω σε δύο κάθετους άξονες από το σημείο τομής τους («αρχή των αξόνων») αλλά «πολικών συντεταγμένων», οποίες αντιστοιχούν στην απόσταση ενός σημείου από την αρχή των αξόνων («ακτινική συντεταγμένη») και στη γωνία που σχηματίζει η «επιβατική ακτίνα» του σημείου, ήτοι η ευθεία που διέρχεται από το υπό εξέταση σημείο και την αρχή των αξόνων («γωνιακή συντεταγμένη»). Η ελικοειδής καμπύλη που λαμβάνεται με αντιστοίχηση του x στην γωνιακή συντεταγμένη, και του ίδιου του e^x στην ακτινική, αξιοσημείωτες ιδιότητες η κυριότερη από τις οποίες είναι ότι αυξάνει σε μήκος παραμένοντας πάντα πανομοιότυπη με τον εαυτό της. Πράγματι, αν παραλείψουμε οποιοδήποτε μήκος του τελικού τμήματος της καμπύλης, εκείνη που μένει μοιάζει ακριβώς σαν μικρογραφία της αρχικής, και για το λόγο αυτό σχετίζεται σε κάποιο βαθμό με τα fractals (σχήματα που προκύπτουν από την αέναη επανάληψη του ίδιου βασικού σχεδίου). Η αφαίρεση αυτή του τελικού τμήματος, με διατήρηση της καμπύλης στην ίδια μορφή είναι μάλιστα δυνατόν να συνεχιστεί επ’ άπειρο καθώς το αρχικό τμήμα της καμπύλης πλησιάζει ασυμπτωτικά την αρχή των αξόνων, διαπίστωση η οποία ανήκει στον γνωστό ερευνητή και μαθητή του Γαλιλαίου Evangelista Torricelli (1608 – 1647). Με άλλα λόγια, η καμπύλη επεκτείνεται ακατάπαυστα προς αμφότερα τα άκρα, παραμένοντας αμετάβλητη ως προς το σχήμα της.

Από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει πως όταν η γωνιακή συντεταγμένη της λογαριθμικής έλικας αυξάνει κατά «αριθμητική πρόοδο», ήτοι με διαρκή πρόσθεση της αυτής σταθερής ποσότητας στην αρχική της τιμή, η ακτινική αυξάνει κατά «γεωμετρική πρόοδο», ήτοι με διαδοχικό πολλαπλασιασμό της αρχικής της τιμής επί μία σταθερή ποσότητα. Σε αυτό οφείλεται η διαρκής αύξηση του μήκους της λογαριθμικής έλικας, η οποία είναι αποτέλεσμα της αύξησης της γωνιακής συντεταγμένης, με παράλληλη διατήρηση του ίδιου σχήματος: Ουσιαστικά η λογαριθμική έλικα επιμηκύνεται διαστελλόμενη κατά σταθερό λόγο, σαν συνολικό σχήμα. Άλλη χαρακτηριστική ιδιότητα της είναι το γεγονός πως κάθε ευθεία γραμμή διερχόμενη από την αρχή των αξόνων σχηματίζει την αυτή γωνία με την εφαπτομένη της καμπύλης σε κάθε σημείο στο οποίο την τέμνει· με άλλα λόγια, «τέμνει την λογαριθμική έλικα υπό ίσες γωνίες». Λόγω της μοναδικής αυτής ιδιότητάς της, η λογαριθμική έλικα καλείται και *Ισογώνια Έλικα*.

Τα παραπάνω γνωρίσματα της ισογώνιας έλικας, και ιδιαίτερα η ικανότητά της να αυξάνει σε μήκος διατηρώντας το ίδιο σχήμα, έχουν σαν αποτέλεσμα να απαντά στη Φύση με μεγάλη συχνότητα. Είναι ιδιαίτερα εξυπηρετική σαν μορφή για ορισμένα πλάσματα τα οποία αυξάνουν σε μέγεθος κατά τη διάρκεια της ζωής τους, προσθέτοντας στο ήδη υπάρχον σώμα τους νέα τμήματα όμοια κατά βάση με κάποιο αρχικό. Παράδειγμα ορισμένα οστρακοειδή, κοχλίες, κ.α. - ακόμα και οι χαυλιόδοντες του ελέφαντα, αν επιμηκυνθούν για καιρό, τείνουν να αποκτήσουν ένα παρόμοιο σπειροειδές σχήμα. Απαντά επίσης σε διατάξεις φυτών, νεφών, σε στροβιλώδεις κινήσεις, σε κοσμικές δομές (σπειροειδείς γαλαξίες) κ.α.

Από τις πλέον χαρακτηριστικές ιδιότητες της e^x είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση αυτή είναι η μοναδική που ισούται με την παράγωγό της - και, κατά συνέπεια, και με τη δεύτερη παράγωγο, την τρίτη, την τέταρτη… έως το άπειρο. Με άλλα λόγια, η εκθετική συνάρτηση δεν περιγράφει μόνο κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος, αλλά και το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους, την επιτάχυνση του ρυθμού μεταβολής, κ.ο.κ. Κατά συνέπεια, η διάσημη αυτή συνάρτηση είναι κατάλληλη για να περιγράψει κάθε μέγεθος ο ρυθμός μεταβολής του οποίου εξαρτάται από το μέγεθος αυτό. Παρόμοια μεγέθη όμως υπάρχουν άφθονα. Μερικά από αυτά είναι:

- Ο χρονικός ρυθμός εκπομπής ακτινοβολίας, και, κατά συνέπεια ελάττωσης της μάζας ενός ραδιενεργού υλικού είναι ανάλογος προς την ποσότητα της μάζας του υλικού αυτού.
- Ο χρονικός ρυθμός ελάττωσης της θερμοκρασίας ενός αντικειμένου μέσα σε ψυχρότερο από αυτό περιβάλλον είναι ανάλογος προς τη θερμοκρασία του αντικειμένου (Ακριβέστερα: Προς τη διαφορά της θερμοκρασίας του από εκείνη του ψυχρότερου περιβάλλοντος.)

- Ο ρυθμός ελάττωσης της έντασης του ήχου σε σχέση με την απόσταση από την ηχητική πηγή είναι επίσης ανάλογος προς την ένταση του ήχου.
- Παρ' όλον ότι δεν είναι συνεχής συνάρτηση όπως οι προηγούμενες, το μέγεθος ανατοκιζόμενου κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο περιγράφεται ικανοποιητικά από μία εκθετική συνάρτηση. Το αυτό ισχύει και για το παρόμοιο φαινόμενο της αύξησης ενός πληθυσμού.
- Ο ρυθμός αύξησης ενός ερεθίσματος των αισθήσεων είναι ανάλογος της έντασης του ερεθίσματος, σύμφωνα με το νόμο των Weber και Fechner, ο οποίος έχει σημαντικές εφαρμογές, π.χ. στην οπτική.
- Η επιβράδυνση σώματος κινούμενου μέσα σε ιξώδες ρευστό είναι ανάλογη της ταχύτητας με την οποία κινείται (νόμος του Stokes).

Ανάμεσα στα γενικότερα φαινόμενα, στην περιγραφή των οποίων η εκθετική συνάρτηση παίζει καθοριστικό ρόλο, συμπεριλαμβάνονται ενδεικτικά τα ακόλουθα:

- Η μεταβολή της μάζας πυραύλου περιγράφεται ως εκθετική συνάρτηση του λόγου της ταχύτητας την οποία αυτός επιτυγχάνει προς την ταχύτητα εξόδου των αερίων που εξαπολύει.
- Η κίνηση αρμονικού ταλαντωτή υποκείμενου σε «μέγιστη» ή σε «κρίσιμη απόσβεση» περιγράφεται από εκθετική συνάρτηση με αρνητικό εκθέτη. Το ταλαντούμενο σώμα επιβραδύνεται προοδευτικά και σε σύντομο χρονικό διάστημα ακινητεί. Υπενθυμίζουμε, επ' ευκαιρία, πως ο αρμονικός ταλαντωτής καθορίζεται από το γεγονός ότι η δύναμη επαναφοράς του κινητού στη θέση ισορροπίας, ήτοι η δεύτερη παράγωγος της απομάκρυνσης, είναι ανάλογη της απομάκρυνσης αυτή εμπίπτοντας έτσι στην προαναφερθείσα χαρακτηριστική ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης.
- Τεράστια η χρησιμότητα της e^x στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς, όπως ο *Μετασχηματισμός Laplace*. Χάρη στις τεχνικές αυτές επιτυγχάνεται, π.χ., η επίλυση σημαντικών διαφορικών εξισώσεων.
- Τα ανωτέρω παραδείγματα αφορούσαν μόνον πραγματικές εκθετικές συναρτήσεις, λαμβάνοντας όμως υπ' όψη την σχέση του Euler και τη συνακόλουθη σύνδεση της εκθετικής συνάρτησης με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, τα φαινόμενα που περιγράφονται από αυτήν αυξάνονται… εκθετικά! Κάθε μορφή αρμονικού ταλαντωτή, για παράδειγμα, περιγράφεται από μία μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Γενικότερα, η μιγαδική εκθετική συνάρτηση παίζει καθοριστικό ρόλο στην *Ανάλυση Fourier*, με βάση την οποία αναλύονται ένα πλήθος από φαινόμενα σχετιζόμενα με διάδοση κυμάτων. Είναι επίσης δυνατόν, χάρη σε αυτή την ίδια μέθοδο, φαινόμενα όχι κυματικά, αυτά καθαυτά, να περιγραφούν σαν υπερεπιθέσεις ενός πλήθους «τοπικών» κυμάτων («κυματοδέματα» ή «κυματοπακέτα»).
- Η χρησιμότητα της εκθετικής συνάρτησης στην ανωτέρω περιγραφή φαινομένων ως συνθέσεις «κυματοπακέτων» καθιστά αυτήν ανεκτίμητη για την διατύπωση πλήθους αρχών της Κβαντομηχανικής. Πράγματι, χωρίς να πάμε μακριά, αρκεί να λάβουμε υπ' όψη ότι τα σωματίδια της ύλης και τα κβάντα του φωτός αποτελούν, κατά κάποιον τρόπο, τέτοια ακριβώς «κυματοπακέτα». Κατά συνέπεια, η e^x είναι το καταλληλότερο μαθηματικό αντικείμενο για την συγκρότηση των «κυματοσυναρτήσεων» με τις οποίες περιγράφονται οι εν λόγω οντότητες.

Πολλαπλές οι εμφανίσεις της διάσημης συνάρτησης και στη Θεωρία των Πιθανοτήτων. Αρκετές κατανομές τυχαίων μεταβλητών - ήτοι συναρτήσεις που δίνουν την πιθανότητα η υπό εξέταση τυχαία μεταβλητή να λαμβάνει τιμές εντός συγκεκριμένου διαστήματος - είναι χτισμένες γύρω από αυτή. Αναφέρουμε ορισμένες:

- Η *Κατανομή Poisson* η οποία περιγράφει φαινόμενα όπως το πλήθος των ατόμων ραδιενεργού ουσίας που διασπώνται στη μονάδα του χρόνου, των κλήσεων που δέχεται τηλεφωνικό κέντρο επίσης ανά μονάδα χρόνου, των τυπογραφικών σφαλμάτων ανά σελίδα ή και των βακτηριδίων που αναπτύσσονται σε ορισμένες καλλιέργειες. Πέρα όμως από αυτό, χάρη στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, η κατανομή Poisson αποτελεί καλή προσέγγιση προκειμένου και για φαινόμενα τα οποία εμπίπτουν σε άλλες κατανομές. Παράδειγμα η *Διωνυμική Κατανομή* που αφορά την πιθανότητα σε έναν ορισμένο αριθμό δοκιμών ορισμένες από αυτές να σημειώσουν επιτυχία οι δε υπόλοιπες αποτυχία.
- Η *Κανονική Κατανομή* ή («Κωδωνοειδής», εξ αιτίας του σχήματός της γραφικής της παράστασης) υπεισέρχεται σε πάμπολλα σημαντικά φαινόμενα των οποίων τα μεταβλητά μεγέθη είναι τυχαία. Τέτοια είναι: Ο αριθμός των σφαλμάτων σε πειραματικές μετρήσεις, ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μίας βιομηχανίας, οι βιολογικές μεταβολές ενός πληθυσμού (π.χ. ύψος ή βάρος). Η κανονική κατανομή περιγράφει εν γένει τις διακυμάνσεις μεγεθών οι οποίες προκύπτουν από τη συνολική επίδραση πολλών άσχετων μεταξύ τους παραγόντων, έκαστος των οποίων είναι μικρής σημασίας. Η κανονική κατανομή αποτελεί επίσης άλλη μία καλή προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.
- Η *Εκθετική Κατανομή* περιγράφει την πιθανότητα να παρέλθει ορισμένος χρόνος έως τη στιγμή που θα συμβεί κάποιο συγκεκριμένο γεγονός, όπως σεισμός, μία εσφαλμένη τηλεφωνική κλίση, ή ένα «τζάκποτ».
- Άλλες κατανομές βασισμένες στην εκθετική συνάρτηση είναι η *Γάμμα Κατανομή* και η *Βήτα Κατανομή* οι οποίες περιγράφονται από τις περίφημες ομώνυμες συναρτήσεις, στη σύσταση των οποίων συμμετέχει η e^x.
- Η συχνή παρουσία της εκθετικής συνάρτησης στη Θεωρία Πιθανοτήτων έχει σαν αποτέλεσμα την εξ ίσου συχνή εμφάνισή της σε ζητήματα της Στατιστικής Μηχανικής. Παραδείγματα αποτελούν ο *Νόμος Φασματικής Κατανομής του Planck* που περιγράφει την κατανομή της ενέργειας σε ορισμένα διάστημα μηκών κύματος της ακτινοβολίας ενός «μέλανος σώματος», η *Κατανομή Maxwell - Boltzmann* η οποία δίνει τον αριθμό των σωματιδίων ενός συστήματος σε ορισμένη ενεργειακή κατάσταση - περίπτωση της προαναφερθείσας εκθετικής κατανομής - ο *Νόμος του Maxwell* ο οποίος δίνει τον αριθμό των μορίων αερίου με ταχύτητες εντός συγκεκριμένου διαστήματος, και οι κατανομές *Bose - Αϊνστάιν* και *Fermi - Dirac* οι οποίες δίνουν την πιθανότητα ενός σωματιδίου («μποζονίου» και «φερμιονίου», αντίστοιχα) να αποκτήσει συγκεκριμένη ενέργεια.

Ο αναγνώστης θα έχει ήδη αντιληφθεί πως το να επιχειρήσει κανείς να παραθέσει όλες τις ενδεχόμενες εμφανίσεις της εκθετικής συνάρτησης στα φαινόμενα του κόσμου που μας περιβάλει είναι καθαρή ουτοπία! Περιοριζόμαστε, ως εκ τούτου, σε ένα ακόμα παράδειγμα από τον κόσμο των φυσικών επιστημών καθώς και σε μία συντομότατη αναφορά σε πρόσφατα πονήματα τα οποία συνδυάζουν τη διάσημη συνάρτηση με τις πλέον φιλόδοξες απόπειρες μαθηματικής ερμηνείας του σύμπαντος.

Ζωτική σημασία για τα φυσικά φαινόμενα και τους νόμους που τα περιγράφουν έχει η *συμμετρία*, ήτοι κάθε μετασχηματισμός (μετατόπιση, περιστροφή, αναστροφή, ή και άλλες, πιο αφηρημένες πράξεις) ο οποίος αφήνει το υπό εξέταση σύστημα αμετάβλητο, ως προς τα ειδοποιά του γνωρίσματα. Λέγοντας «ζωτική σημασία» εννοούμε πως πολλά αντικείμενα των διαφόρων κλάδων των επιστημών, από τα σχήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έως τις δομές και αλληλεπιδράσεις της Θεωρίας τη Σχετικότητας και της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου, ταυτοποιούνται ουσιαστικά από τις συμμετρίες που διαθέτουν («Συμμετρίες Βαθμίδας / Gauge Symmetries», προκειμένου για τις δύο διάσημες θεωρίες). Επίσης, στα φαινόμενα της Κλασσικής και Κβαντικής Μηχανικής κάθε συμμετρία ισοδυναμεί με διατήρηση ενός μεγέθους. Π.χ., όταν ένα σύστημα παραμένει αμετάβλητο κατά την απλή μετατόπισή του πάνω σε μία διεύθυνση («συμμετρία μετατόπισης») τότε η συνολική ορμή αυτού του συστήματος παραμένει σταθερή («διατήρηση της ορμής») ενώ όταν παραμένει αμετάβλητο κατά την πάροδο του χρόνου («χρονική συμμετρία») τότε το μέγεθος του που παραμένει σταθερό είναι η ενέργεια («διατήρηση της ενέργειας»).

Σε πολλές περιπτώσεις όμως, οι συμμετρίες ενός συστήματος είναι κατ' αρχήν εμφανείς μόνο στην «απειροστή» τους μορφή, χωρίς να προκύπτει άμεσα αν οι πολύ μικροί μετασχηματισμοί που αφήνουν το σύστημα αμετάβλητο συνιστούν μακροσκοπικά μετατόπιση, περιστροφή, ή κάτι άλλο. Η κατάλληλη σύνθεση των εν λόγω «απειροστικών γεννητόρων» ενός μετασχηματισμού, με στόχο τον προσδιορισμό αυτού του ιδίου, επιτυγχάνεται με χρήση και πάλι της θαυματουργής εκθετικής συνάρτησης. Σε μία γενικευμένη της μορφή, η συνάρτηση αυτή «απεικονίζει» το χώρο των «απειροστικών γεννητόρων» («*Άλγεβρα Lie*») στο αντίστοιχο σύστημα συμμετριών («*Ομάδα Lie*») αντιστοιχίζοντας σε κάθε απειροελάχιστη μεταβολή την κατάλληλη συμμετρία.

Μία ανάλογη απεικόνιση, και πάλι χάρη σε γενίκευση της εκθετικής συνάρτησης, αυτή τη φορά στη Θεωρία της Σχετικότητας - και γενικότερα στη Γεωμετρία του Riemann - είναι και η αντιστοίχιση των δυνατών απειροστών μετατοπίσεων («εφαπτόμενα διανύσματα») ενός υλικού σώματος σε μακροσκοπικές μετατοπίσεις κατά μήκος μίας «χρονοειδούς γεωδαισιακής καμπύλης», ήτοι της τροχιάς ενός αντικειμένου με μη μηδενική μάζα ηρεμίας, ευρισκομένου σε ελεύθερη πτώση εντός βαρυτικού πεδίου. Χάρη σε αυτή ακριβώς την απεικόνιση επιτυγχάνεται η μαθηματική συγκρότηση του «*Συστήματος Κανονικών Συντεταγμένων Riemann*», το οποίο δεν είναι άλλο από το πολυθρύλητο «τοπικό αδρανειακό σύστημα» («σύστημα σε ελεύθερη πτώση») τόσο πολύτιμο στην διαμόρφωση της διάσημης θεωρίας βαρύτητας του Αϊνστάιν.

Κλείνουμε την περιήγησή μας στον «βίο και πολιτεία» του αριθμού e με μία σύντομη μνεία κάποιων από τις πλέον πρόσφατες - και πλέον φιλόδοξες! - εργασίες, όχι μόνο στα Θεωρητικά Μαθηματικά αλλά και στη Μαθηματική Φυσική. Αναφέραμε ήδη νωρίτερα πως η ανακάλυψη νέων αποδεδειγμένα υπερβατικών αριθμών είναι δύσκολο εγχείρημα, και πως υπάρχουν κενά όσον αφορά ακόμα και ένα πλήθος από αριθμούς οι οποίοι είναι καταφανώς υπερβατικοί αλλά αυτό δεν έχει ακόμα αποδειχθεί για κανέναν από αυτούς. Αναφέραμε επίσης πως αν αληθεύει η «υπόθεση του Schanuel, τότε ένα άπειρο, ουσιαστικά, πλήθος από τους εν λόγω αριθμούς αποδεικνύεται αυτόματα ότι είναι υπερβατικοί. Αρκετά πρόσφατα ο ρωσικής καταγωγής καθηγητής της Μαθηματικής Λογικής στο Μαθηματικό Ίδρυμα του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, Boris Zilber, απέδειξε, χρησιμοποιώντας τεχνικές της σύγχρονης Άλγεβρας, την ύπαρξη ενός «σώματος» (συνόλου στο οποίο ορίζονται με λογική συνέπεια πράξεις ανάλογες του συνήθους πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης των μιγαδικών αριθμών) στο οποίο είναι επίσης ορισμένη μία εκθετική συνάρτηση και στο

Ε Ν Θ Ε Τ Ο 3

Η φυσική εκθετική συνάρτηση, αυτή καθαυτή, είναι δυνατόν να ορισθεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Ο Euler έδωσε ως ορισμό της ποσότητας e^x το όριο της ακολουθίας $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, όταν το n τείνει στο άπειρο. Άλλος τρόπος, ισοδύναμος με αυτόν, είναι ο ορισμός της υπό μορφή «δυναμοσειράς», ήτοι ως άθροισμα απείρων όρων, όπως συμβαίνει και με την «άπειρη σειρά», με τη διαφορά ότι σε κάθε όρο υπεισέρχεται τώρα και η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Υπάρχει δε πάντα η δυνατότης του ορισμού της ως η αντίστροφη συνάρτηση του φυσικού λογαρίθμου. Υπενθυμίζουμε ότι αντίστροφη κάποιας «αρχικής» συνάρτησης, λέγεται, σε απλουστευμένη διατύπωση, εκείνη η οποία σε κάθε τιμή της «αρχικής» συνάρτησης επιστρέφει την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής στην οποία η αρχική λάμβανε τη συγκεκριμένη της τιμή.

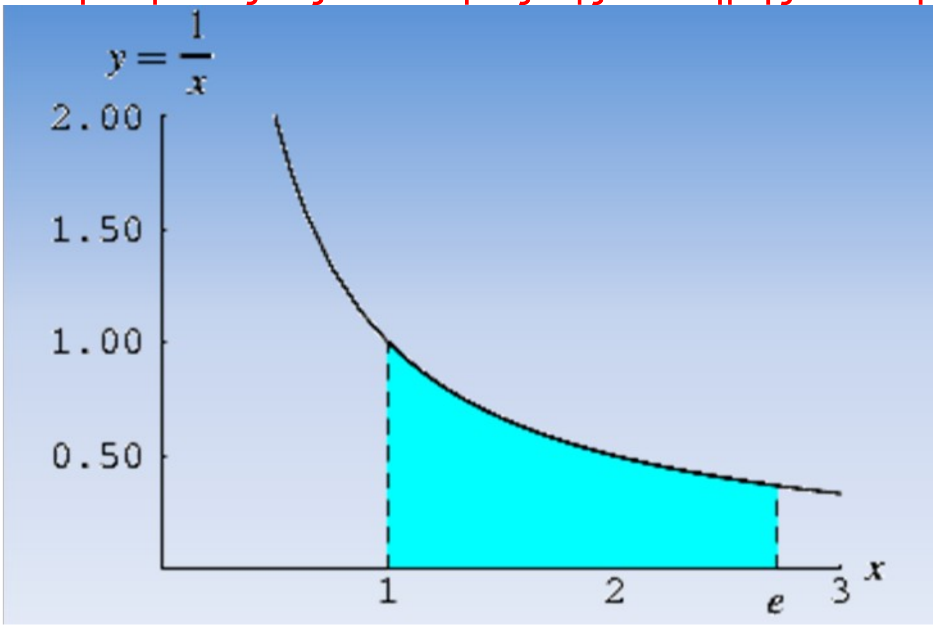
Αξίζει να σημειωθεί πως ο ορισμός υπό τη μορφή του ανωτέρω ορίου της ακολουθίας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος πρακτικά, προκειμένου για τον υπολογισμό των βασικών μετασχηματισμών συμμετρίας στην Κλασσική και Κβαντική Μηχανική, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Έχοντας ορίσει την πραγματική εκθετική συνάρτηση, προέκυπτε αυτονόητα το ζήτημα να γίνει το ίδιο και για την αντίστοιχη μιγαδική. Το αποφασιστικό βήμα έγινε από τον Euler με τη διατύπωση της ομώνυμης σχέσης, η οποία προσδιορίζει την ποσότητα e^{ix} ως ένα μιγαδικό αριθμό με πραγματικό μέρος ίσο με το συνημίτονο και φανταστικό ίσο με το ημίτονο του x. Άμεση συνέπεια της σχέσης αυτής του Euler είναι η ταυτότητα $e^{i\pi}+1=0$, η οποία συνδέει με καλαίσθητο - αλλά και «συμβολικό» για ορισμένους - τις πέντε θεμελιώδεις αριθμητικές σταθερές $0, 1, i, \pi, e$.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, και αντιμετωπίζοντας το x ως τη

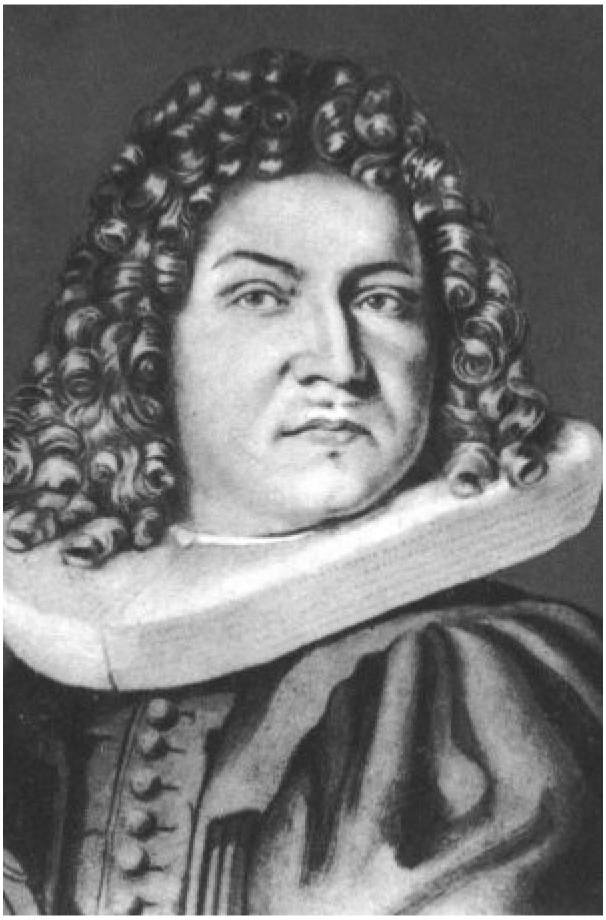
Φ Ω Τ Ο Γ Ρ Α Φ Ι Ε Σ - Λ Ε Ζ Α Ν Τ Ε Σ

Φωτογραφία 1: Leonhard Euler. Ο από πολλούς θεωρούμενος ως ο πατέρας της διάσημης σταθεράς.

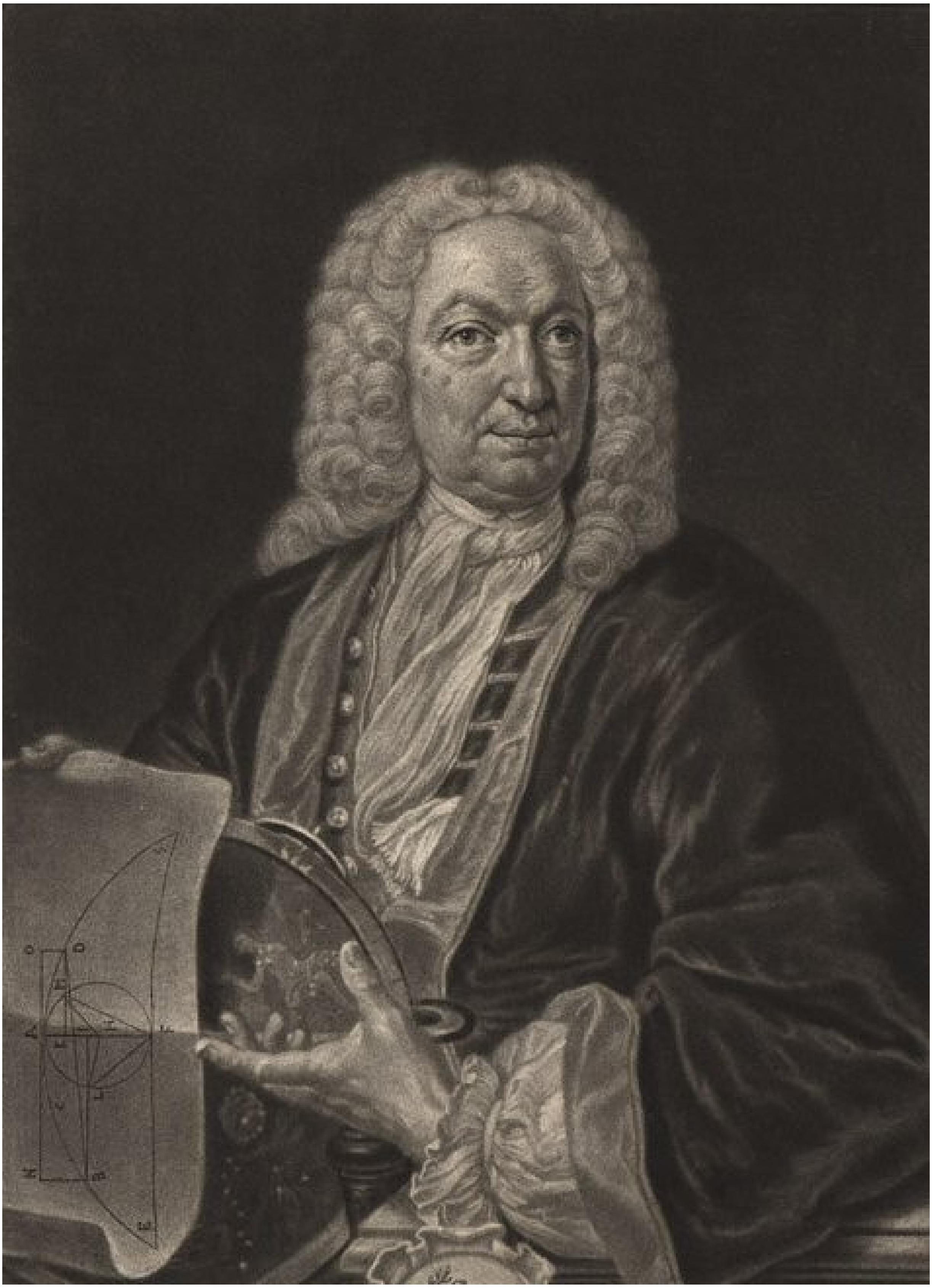


Φωτογραφία 2: Το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την τετραγωνική υπερβολή, τον οριζόντιο άξονα και τις κάθετες στα σημεία 1 και e είναι ίσο με 1.

Φωτογραφία 3: John Napier. Ο επινοητής των φυσικών λογαρίθμων.



Φωτογραφία 4: Jacob Bernoulli. Ο υπολογισμός του e ως ορίου ακολουθίας τον οποίο πραγματοποίησε - χωρίς ο ίδιος να αντιληφθεί περί τίνος επρόκειτο - είναι ακόμα και σήμερα ιδιαίτερα χρήσιμος, και μάλιστα στον υπολογισμό μετασχηματισμών συμμετρίας της Κβαντομηχανικής.



Φωτογραφία 5: Johann Bernoulli.

Φωτογραφία 6: Christian Huygens.

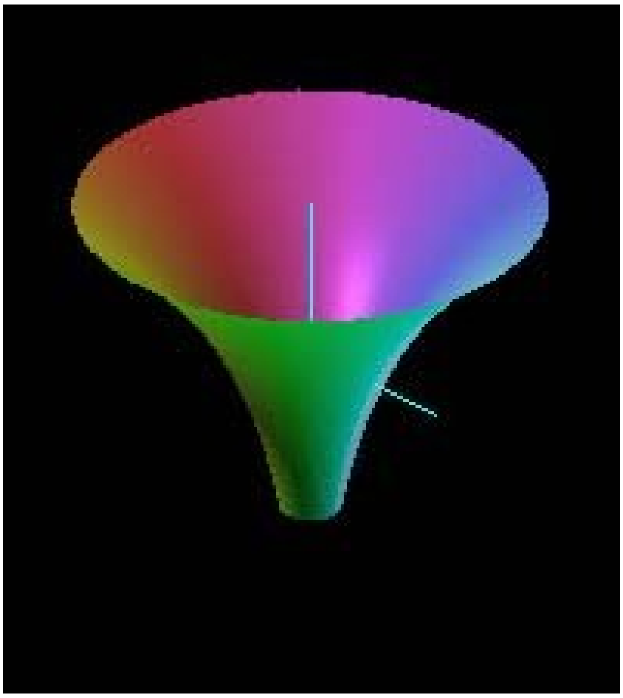
Φωτογραφία 7: James Gregory. Μαζί με τον Jacob Bernoulli διεκδικεί την πατρότητα της διαπίστωσης ότι η λογαριθμική και η εκθετική συνάρτηση είναι αντίστροφες αλλήλων.

Φωτογραφία 8: Joseph Liouville. Απέδειξε για πρώτη φορά την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών, κατασκευάζοντας τους πρώτους αποδεδειγμένα ανήκοντες σε αυτό το σύνολο, οι οποίοι φέρουν το όνομά του.

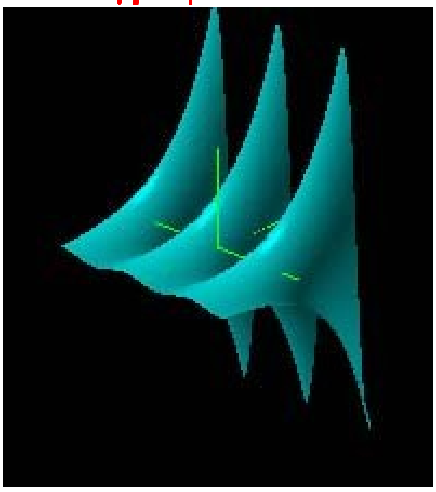
Φωτογραφία 9: Charles Hermite. Διαπίστωσε πως ο διάσημος «αριθμός του Euler» ανήκει στους υπερβατικούς αριθμούς.

Φωτογραφία 10: Carl Louis Ferdinand von Lindemann. Χάρη στο έργο του, ο από αρχαιότητας διάσημος αριθμός π βρήκε τη θέση του κοντά στους άλλους υπερβατικούς.

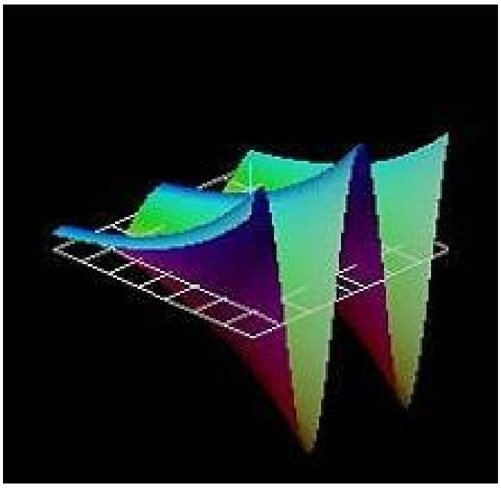
Φωτογραφία 11: Georg Cantor. Το έργο του έφερε επανάσταση στην από αιώνων αντίληψη του ανθρώπου πάνω στα μαθηματικά αλλά και τη λογική, με αποτέλεσμα να αποτελέσει - όπως και ο ίδιος - αντικείμενο μεγάλης εχθρότητας.



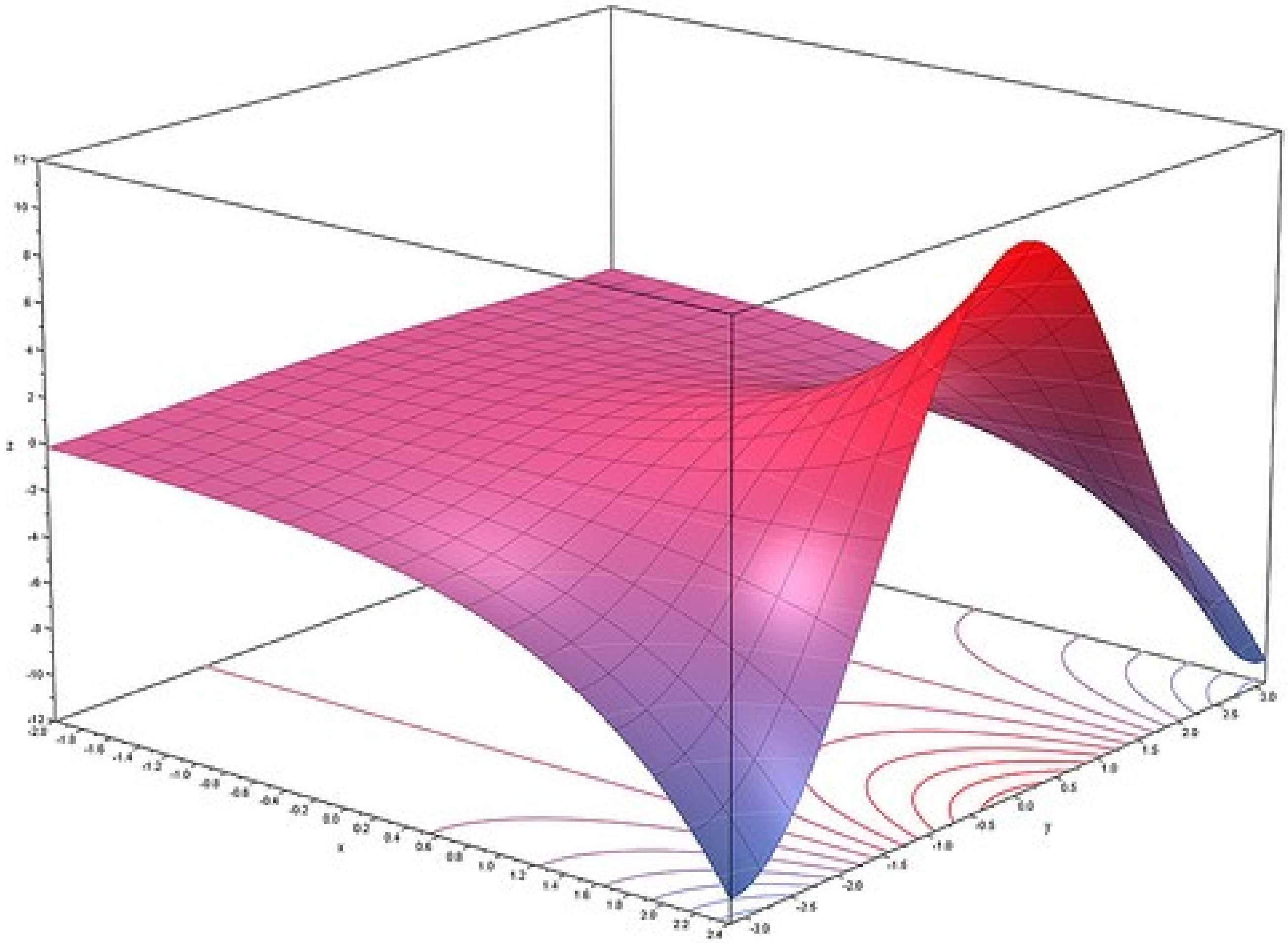
Φωτογραφία 12.



Φωτογραφία 13.



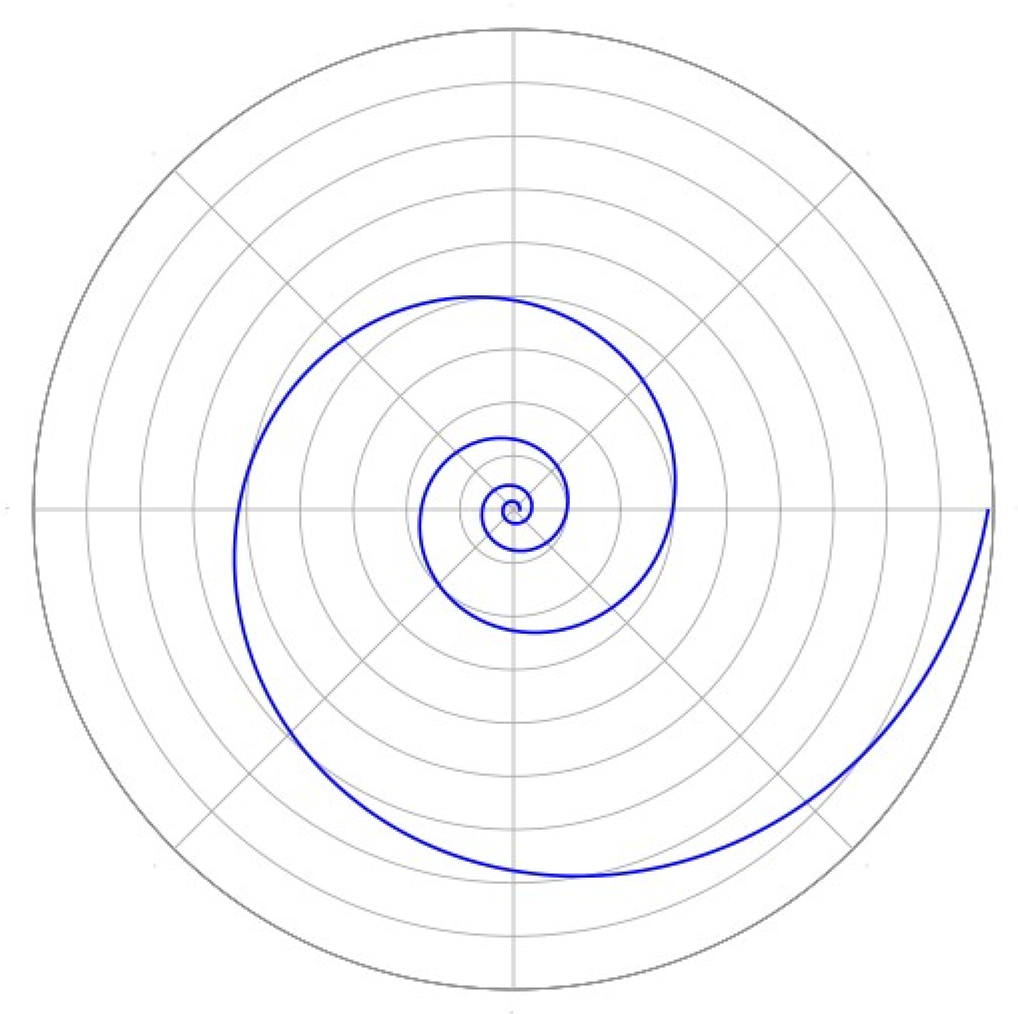
Φωτογραφίες 12 - 14: Στερεοσκοπικές αποδόσεις της εκθετικής συνάρτησης.



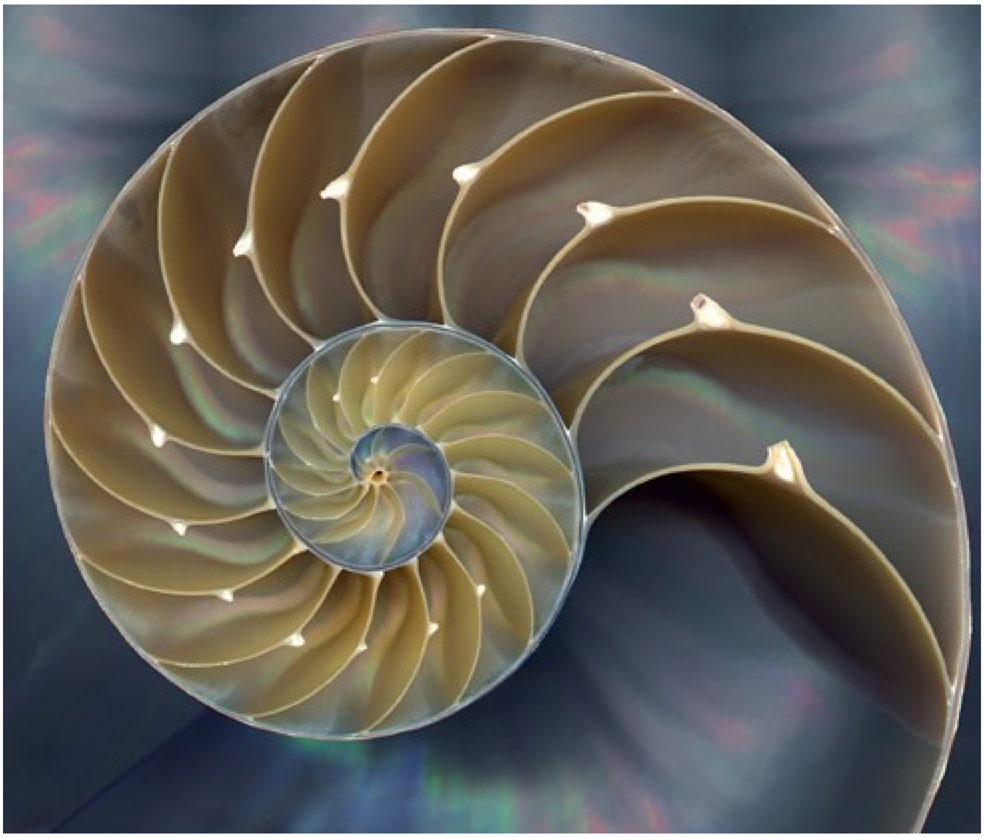
Φωτογραφία 15: Απεικόνιση της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

Φωτογραφία 16: Boris Zilber. Το με «συνεχή πληθάριθμο» σώμα του είναι ίσως ένα και το αυτό με εκείνο των μιγαδικών αριθμών. Αν αυτό αληθεύει, ένα άπειρο πλήθος υπερβατικών αριθμών καθίσταται αυτομάτως γνωστό.

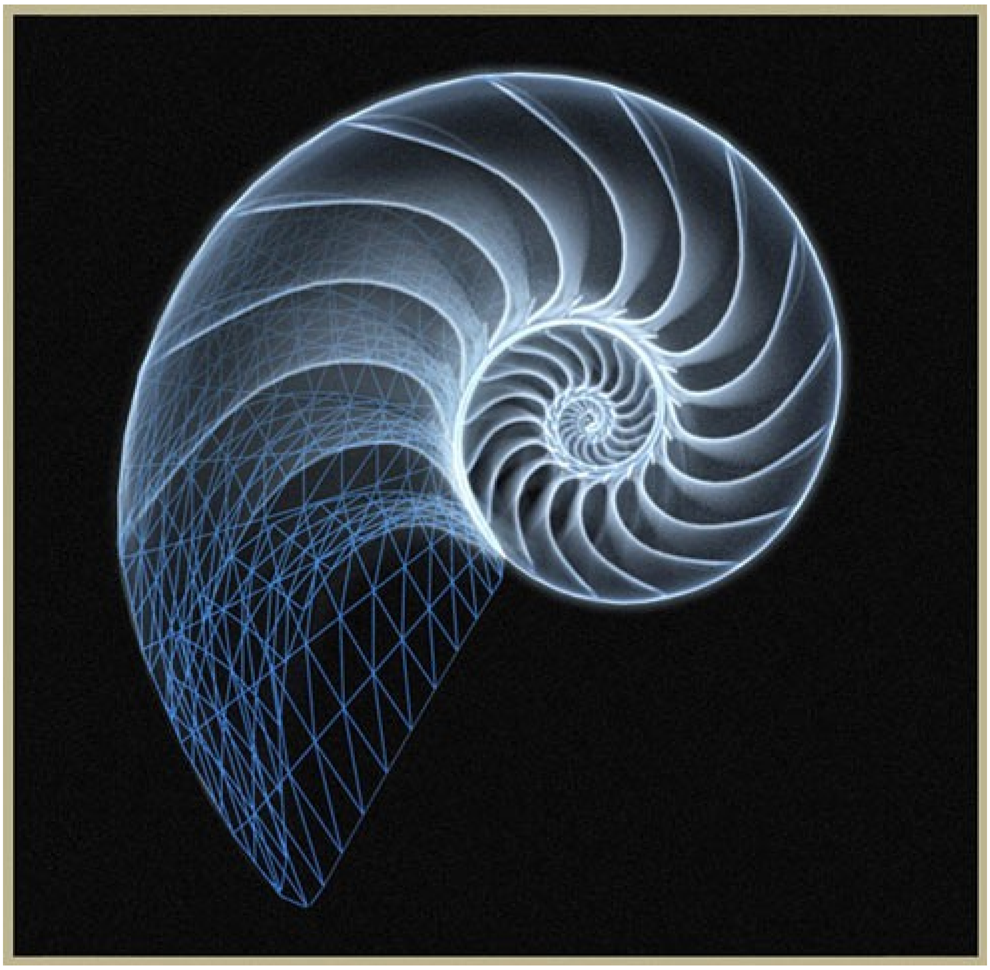
Φωτογραφία 17: Alain Connes.



Φωτογραφία 18: Η λογαριθμική έλικα. Τη μορφή αυτή λαμβάνει η εκθετική συνάρτηση σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων («πολικές συντεταγμένες»). Το σχήμα αυτό απαντά σε μία πλειάδα φυσικών φαινομένων, χάρη στην ιδιομορφία του να αυξάνει σε μέγεθος παραμένοντας πανομοιότυπο με τον εαυτό του.

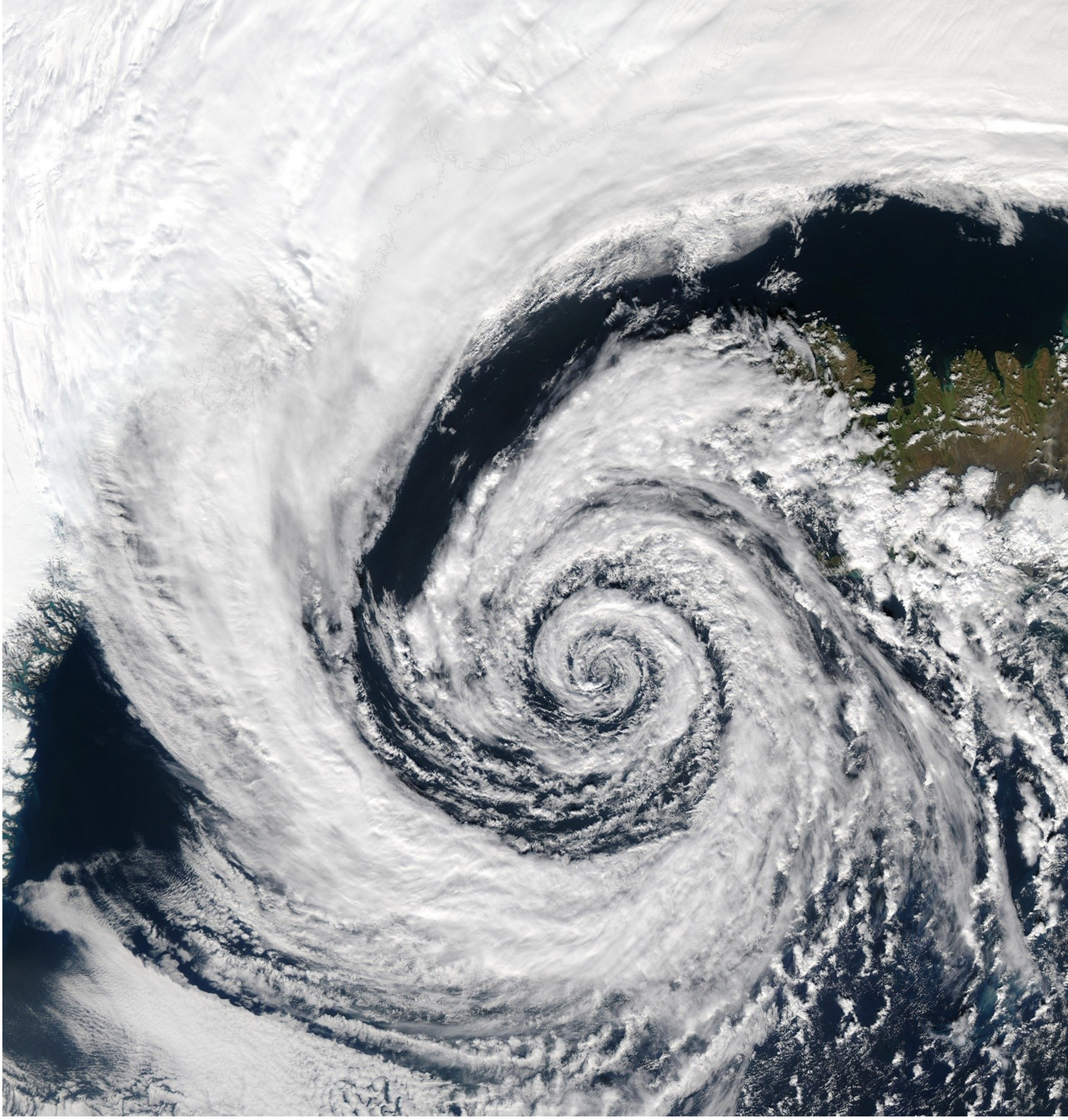


Φωτογραφία 19.



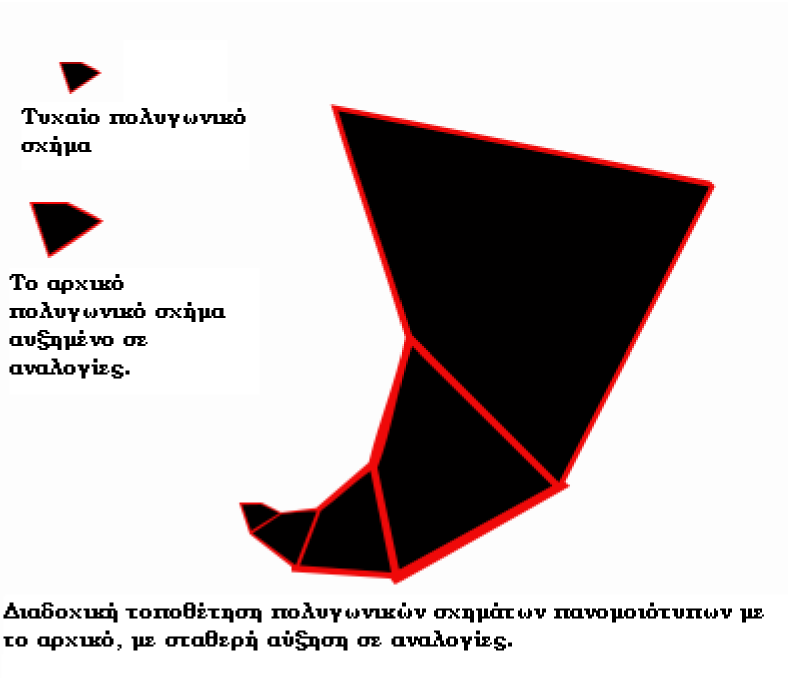
Φωτογραφία 20.

Φωτογραφία 21.

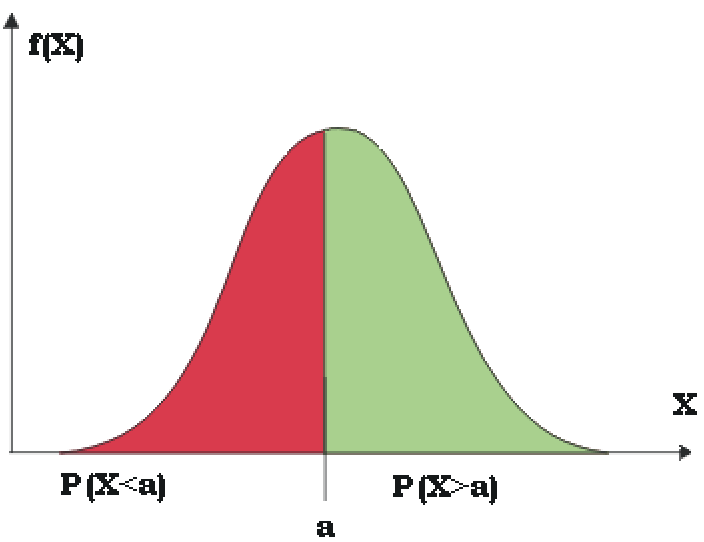


Φωτογραφία 22.

Φωτογραφίες 19 - 23: Εμφανίσεις της λογαριθμικής έλικας στη φύση: Το μαλάκιο «Nautilus Pompilius», εκτεταμένο βαρομετρικό σύστημα χαμηλων πιέσεων, και σπειροειδής γαλαξίας.

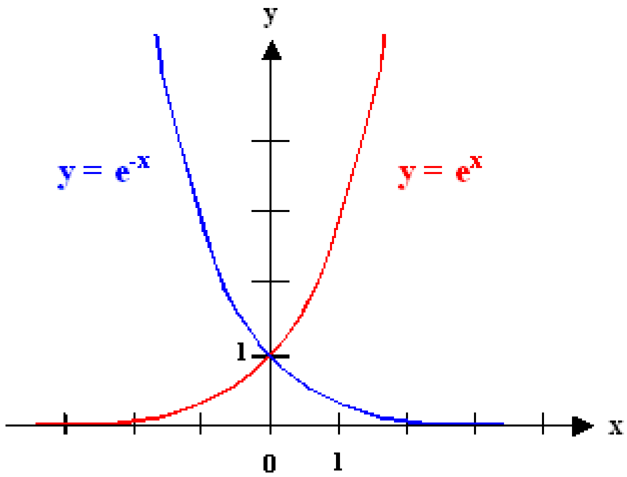


Φωτογραφία 24: Η λογαριθμική έλικα είναι η φυσιολογική εξέλιξη ενός σχήματος που αυξάνεται παραμένοντας όμοιο με τον εαυτό του, ήτοι μεγεθύνοντας μόνο της αναλογίες του. Ξεκινώντας από ένα τυχαίο πολυγωνικό σχήμα, προσθέτομε τμήματα πανομοιότυπα με το αρχικό, με βαθμιαία αύξηση σε διαστάσεις. Το αποτέλεσμα παραπέμπει καθαρά στην εν λόγω καμπύλη.



Φωτογραφία 25: Κατανομή Gauss ή κανονική («κωδωνοειδής). Περιγράφει ένα πλήθος φαινομένων που διέπονται από τους νόμους των πιθανοτήτων. Η περιοχή

κάτω από την καμπύλη συμπεριλαμβάνει της πιθανότερες τιμές τις οποίες ενδέχεται να λάβει η τυχαία μεταβλητή.



Φωτογραφία 26: Η ραγδαία αύξηση είναι παροιμιώδης ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης - ακόμα και η «πληθωριστική φάση» του σύμπαντος περιγράφεται από αυτήν!

Φωτογραφία 27: Εκθετική συνάρτηση. Αν και ξένη προς τον κοινό νου, φαίνεται να συνδέεται σχεδόν με το κάθε τι στον κόσμο που μας περιβάλει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

Eli Maor, «e: Η Ιστορία ενός αριθμού», εκδόσεις «Κάτοπτρο», 2005.

Michael Spivak, «Calculus», Addison Wesley, 1988.

Karl R. Stromberg, «An Introduction to Classical Real Analysis», Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software, 1981.

http://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_number

http://www.newton.ac.uk/preprints/NI05048.pdf

http://www.experimentalmath.info/news/ns-e.html

http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html

http://users.rcn.com/mwhitney.massed/defn_of_e/defn_of_e.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function

http://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_spiral

http://dialinf.wordpress.com/2007/12/15/case-study-i-zilbers-field/

http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/Scott.shtml

http://mathworld.wolfram.com/e.html

http://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/numb14.htm

http://www.halexandria.org/dward089.htm

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/Records.html

http://www.rossi.com/sqr2.htm

http://www.jcu.edu/math/vignettes/sqrt2.htm

[1] Η επιλογή της ονομασίας φαίνεται πως προξενεί εντύπωση, τουλάχιστον σε ορισμένους από τους επαΐοντες της Ιστορίας των Μαθηματικών. Οι λογάριθμοι αυτοί εμφανίζονται με τέτοια συχνότητα στη φύση ώστε είναι μεν λογικό να τους αποκαλέσει κανείς έτσι, όμως αυτό καθίσταται σαφές με βάση τον Απειροστικό Λογισμό, ο οποίος εν τούτοις επινοήθηκε από τον Νεύτωνα και τον Gottfried Leibniz δεκαετίες μετά την υιοθεσία της παραπάνω ονομασίας από τους Mengoli και Mercator.

[2] Για να είμαστε δίκαιοι απέναντι στον μεγάλο Ελβετό μαθηματικό, πρέπει να αναφέρουμε πως, αν και φαίνεται αυτονόητο εκ πρώτης όψεως, το ενδεχόμενο να επέλεξε τον συγκεκριμένο αλφαβητικό χαρακτήρα σαν σύμβολο της διάσημης σταθεράς επειδή αυτό ήταν το αρχικό του δικού του ονόματός θεωρείται από πολλούς ως απίθανο ή και «κωμικό, σαν υπόθεση». Ωστόσο, οι εκτιμήσεις σχετικά με τους λόγους που οδήγησαν στην επιλογή αυτή ποικίλουν. Εικάζεται πως έγινε επειδή το e ήταν το αμέσως επόμενο φωνήεν μετά το a, το οποίο ήδη χρησιμοποιείτο από τον Euler για άλλον συμβολισμό, χωρίς όμως να δίνεται κάποια εξήγηση για την αποφυγή των ενδιαμέσων συμφώνων… Άλλοι υποθέτουν ότι η επιλογή έχει σχέση με τον αρχικό χαρακτήρα της «εκθετικής συνάρτησης» («exponential function») της οποίας ο e αποτελεί βάση.

[3] Σύμφωνα με στοιχεία που μπορούσε κανείς να δει στο διαδίκτυο όταν γραφόταν το παρόν άρθρο (Ιούνιος 2008) το πλήθος των μέχρι τότε υπολογισθέντων ψηφίων του $\sqrt{2}$ ανερχόταν σε *διακόσια δισεκατομμύρια*, ένα επίτευγμα που αποδίδεται στους S. Kondo και S. Pagliarulo, το έτος 2007. Όσο για τον αριθμό e, το πλήθος των δικών του μέχρι τότε υπολογισθέντων ψηφίων αναφερόταν ως ανερχόμενο σε *εκατό δισεκατομμύρια*, χάρη στο έργο τον ίδιων ερευνητών. Δεν ήμασταν τότε, ούτε και είμαστε τώρα, σε θέση να εγγυηθούμε για την ακρίβεια των πληροφοριών!

[4] Ο αυστηρός ορισμός του Καντ για τον όρο «υπερβατικός» είναι ο εξής: «Κάθε γνώση που καταπιάνεται όχι τόσο με συγκεκριμένα αντικείμενα, όσο με τον τρόπο με τον οποίο διαμορφώνεται η γνώση μας περί των διαφόρων αντικειμένων, εις τον βαθμό που ο τρόπος αυτός της γνώσης είναι δυνατόν να υφίσταται *εκ των προτέρων* (*a priori*)». Μήπως τα λόγια αυτά δεν περιγράφουν σε αξιόλογο βαθμό την ουσία των υπερβατικών αριθμών; Μήπως δεν είναι αλήθεια πως οι υπερβατικοί αριθμοί συνιστούν απλά, μαζί βέβαια και με άλλες έννοιες, τον τρόπο με τον οποίο είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τη θεωρητική - μαθηματική μας γνώση περί των πραγμάτων και των φαινομένων της φύσης, ο δε τρόπος αυτός - οι αλήθειες των Μαθηματικών και η αντιστοίχισή τους με τους νόμους της φυσικής πραγματικότητας - εκλαμβάνεται ως δεδομένος *a priori*, διαφορετικά κάθε ελπίδα για μαθηματική περιγραφή της Φύσης θα ήταν μάταιη; Μήπως ο κάθε υπερβατικός αριθμός δεν αποτελεί εστιασμό, απόσταγμα, συγκεκριμένων γνώσεων και αντιλήψεων που έχουμε για ένα πλήθος - κάποτε και άπειρο - ποσοτήτων και πραγμάτων του αντικειμενικού κόσμου, χωρίς ποτέ ο ίδιος να γίνεται γνωστός και αντιληπτός, αυτός καθαυτός;