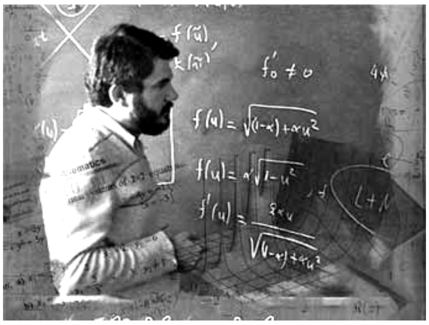
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: Α΄

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1^o

i) Δείξτε ότι για κάθε α, β$\in R$ ισχύει
$\alpha^2+\beta^2+17\cdot 2^{98}\geq 2^{50}(\alpha+4\beta)$ (1)

ii) Για τις τιμές των α, β για τις οποίες ισχύει το ίσον της ανισότητας (1), να δείξετε ότι η εξίσωση
$x^2-\alpha\beta\left(1+\sqrt{\alpha\beta}\right)\cdot x+\frac{\alpha^2\beta^3}{2}=0$ (2)
έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

iii) Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (2) να δείξετε ότι
$\rho_1^{\frac{1}{25}}=\rho_2^{\frac{3}{50}} \quad (\rho_1>\rho_2)$

Θέμα 2^o

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^O\right)$, δίνονται:

- ΑΔ ύψος.
- η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει το ύψος ΑΔ στο σημείο Ε.
- ΑΖ διχοτόμος της γωνίας ΔΑΓ.

i) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

ii) Στην προέκταση της ΓΑ να πάρετε τμήμα ΑΚ = ΖΕ.
Να δείξετε ότι η ΖΚ διχοτομεί την ΑΕ.

Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: ***Α΄***

Δράμα 3 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

i) Η ανισότητα (1) είναι ισοδύναμη με την

$$\alpha^2+\beta^2+17\cdot 2^{98}\geq 2^{50}\cdot\alpha+4\beta\cdot 2^{50}\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\cdot 2^{49}+2^{98}+\beta^2-2\beta\cdot 2^{51}+16\cdot 2^{98}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2-2\alpha\cdot 2^{49}+\left(2^{49}\right)^2+\beta^2-2\beta\cdot 2^{51}+\left(2^{51}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$\left(\alpha-2^{49}\right)^2+\left(\beta-2^{51}\right)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε α,β $\in R$.

ii) $\left(\alpha-2^{49}\right)^2+\left(\beta-2^{51}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(\alpha=2^{49}\right)\quad \kappa\alpha\iota\quad\left(\beta=2^{51}\right)$

Για την διακρίνουσα της εξίσωσης (2) έχουμε

$$\Delta=\alpha^2\beta^2\left(1+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2-2\alpha^2\beta^3=2^{200}\left(1+2^{50}\right)^2-2\cdot 2^{98}\cdot 2^{153}$$

$$=2^{200}[1+2\cdot 2^{50}+\left(2^{50}\right)^2]-2^{252}$$

$$=2^{200}[1+2\cdot 2^{50}+\left(2^{50}\right)^2-2\cdot\left(2\cdot 2^{50}\right)]$$

$$=2^{200}[1-2\cdot 2^{50}+\left(2^{50}\right)^2]=2^{200}\left(2^{50}-1\right)^2>0.$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες άνισες.

iii) Οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι:

$$\rho_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2^{100}\left(1+2^{50}\right)\pm\sqrt{2^{200}\left(2^{50}-1\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{2^{100}\left(1+2^{50}\right)\pm 2^{100}\left(2^{50}-1\right)}{2}=\frac{2^{100}+2^{150}\pm(2^{150}-2^{100})}{2}$$

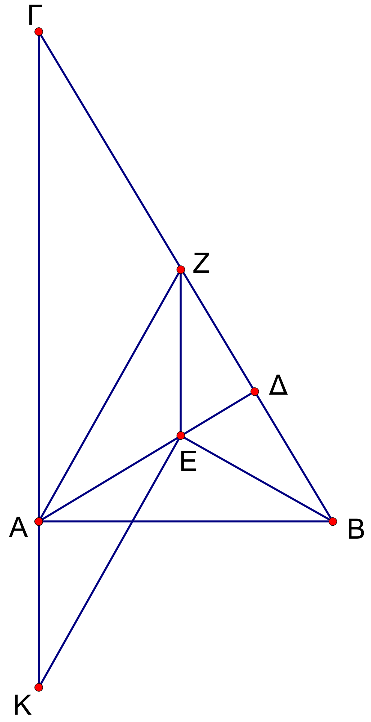
Και επειδή $\rho_1>\rho_2$ θα είναι $\rho_1=2^{150}$ και $\rho_2=2^{100}$

Επομένως $\rho_1^{\frac{1}{25}}=\left(2^{150}\right)^{\frac{1}{25}}=2^6$ και $\rho_2^{\frac{3}{50}}=\left(2^{100}\right)^{\frac{3}{50}}=2^6$

Άρα $\rho_1^{\frac{1}{25}}=\rho_2^{\frac{3}{50}}$.

<u>Θέμα 2ο</u>

i)



- Γωνία $A\hat{Z}B = \hat{\Gamma} + \Gamma\hat{A}Z$ ως εξωτερική στο

τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή ΑΖ είναι διχοτόμος της

γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$A\hat{Z}B = \hat{\Gamma} + \Delta\hat{A}Z$ (1).

- Γωνία $Z\hat{A}B = \Delta\hat{A}Z + \Delta\hat{A}B$.

Αλλά $\Delta\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρώματα της γωνίας $\hat{B}$

από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ.

Επομένως έχουμε την σχέση.

$Z\hat{A}B = \Delta\hat{A}Z + \hat{\Gamma}$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές (ΒΑ = ΒΖ).

ii) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΖ η διχοτόμος ΒΕ προς την βάση ΑΖ θα είναι και ύψος. Επίσης ΑΔ είναι ύψος. Άρα Ε είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και θα ισχύει ΖΕ κάθετη στην ΑΒ. Επίσης ΓΚ κάθετη στην ΑΒ. Άρα ΑΚ // ΕΖ και επειδή είναι ίσες μεταξύ τους από την υπόθεση, το τετράπλευρο ΑΚΕΖ θα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως η διαγώνιος ΑΕ θα περνάει από το μέσο της άλλης διαγωνίου ΖΚ.

Δηλαδή ΖΚ διχοτομεί την ΑΕ.