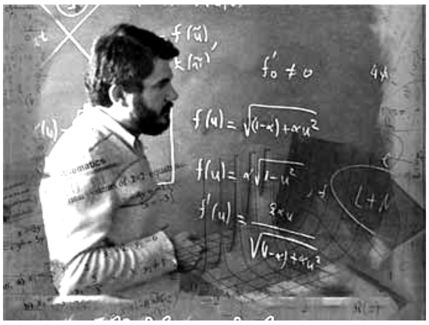
Σύλλογος Θετικών
Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου



Μαθηματικά : Τάξη: *Α΄*

Δράμα 1 Απριλίου 2012

Θέμα 1°

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες των εξισώσεων

$x^2 - λx + μ = 0$ (1) και $x^{4024} - λ^{2012}x^{2012} + μ^{2012} = 0$ (2)
με $λ, μ \in R$, $μ \neq 0$, να δείξετε ότι:

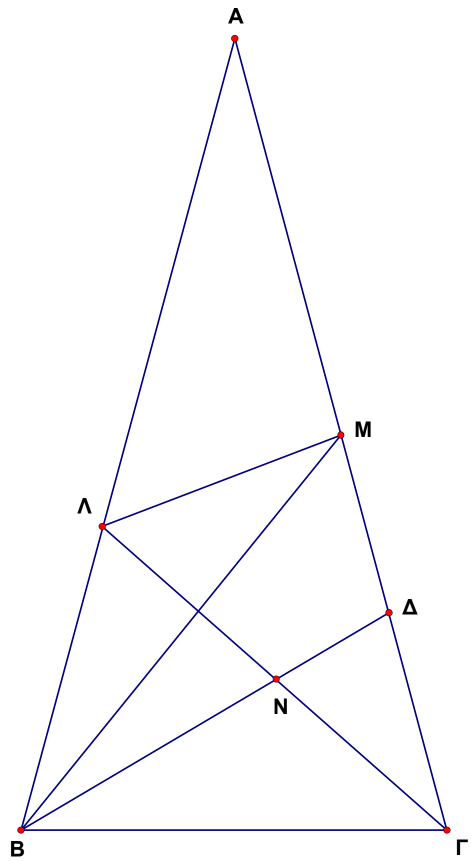
i) $(x_1 + x_2)^{2012} = x_1^{2012} + x_2^{2012}$.

ii) ο αριθμός $\frac{x_1}{x_2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$(ω + 1)^{2012} - ω^{2012} - 1 = 0$$

Θέμα 2°

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ = 2ΒΓ, ΒΜ διάμεσος και ΓΛ διχοτόμος. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΒΔ = ΒΓ.



i) να δείξετε ότι ΒΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{ΑΒΔ}$.

ii) Αν Ν η τομή των ΒΔ και ΓΛ , δείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΛΜΝ είναι ρόμβος.

iii) Αν η ΜΝ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ρ, δείξτε ότι Ρ είναι μέσο της ΒΓ και Δ μέσο της ΜΓ.

Σύλλογος Θετικών Επιστημόνων Δράμας

Διαγωνισμός στη μνήμη του καθηγητή: Βασίλη Ξανθόπουλου

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ : Τάξη: **Α΄**

Δράμα 1 Απριλίου 2011

Θέμα 1ο

i) Οι x_1, x_2 είναι ρίζες της $x^2 - \lambda x + \mu = 0$.

Άρα από τους τύπους του Vieta έχουμε: $x_1 + x_2 = \lambda$ (3) , $x_1 x_2 = \mu$ (4)

Επίσης x_1 είναι ρίζα της $x^{4024} - \lambda^{2012} x^{2012} + \mu^{2012} = 0$, άρα την επαληθεύει,

Οπότε : $x_1^{4024} - \lambda^{2012} \cdot x_1^{2012} + \mu^{2012} = 0 \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow}$

$$x_1^{4024} - (x_1 + x_2)^{2012} \cdot x_1^{2012} + x_1^{2012} \cdot x_2^{2012} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1^{2012}\left(x_1^{2012} - (x_1 + x_2)^{2012} + x_2^{2012}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

Επειδή όμως $x_1 \neq 0$ (Λόγω της (1), αφού $\mu \neq 0$), έχουμε

$$x_1^{2012} - (x_1 + x_2)^{2012} + x_1^{2012} = 0 \Leftrightarrow$$

$(x_1 + x_2)^{2012} = x_1^{2012} + x_2^{2012}$. (5)

ii) Με διαίρεση στα δύο μέλη της (5) με $x_2^{2012} \neq 0$, προκύπτει:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{x_2}\right)^{2012} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2012} + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right)^{2012} - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2012} - 1 = 0$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι $\frac{x_1}{x_2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

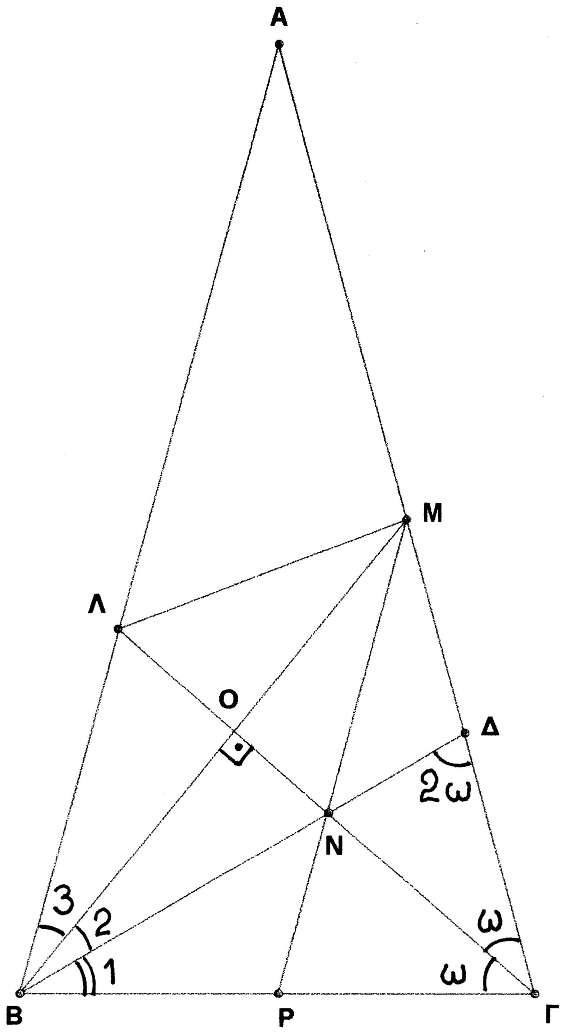
$(\omega + 1)^{2012} - \omega^{2012} - 1 = 0$.

<u>Θέμα 2ο</u>

i) ΑΓ=2ΒΓ και Μ μέσο της ΑΓ.

Άρα ΒΓ=ΜΓ και τρίγωνο ΒΓΜ ισοσσκελές.

Επομένως η διχοτόμος ΓΟ είναι και διάμεσος και ύψος.



Στο τρίγωνο ΒΟΓ: $\hat{B}_2 = 90 - \hat{\omega} - \hat{B}_1$.(1)

Στο τρίγωνο ΒΔΓ: $\hat{B}_1 = 180 - 4\hat{\omega}$. (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\hat{B}_2 = 3\hat{\omega} - 90$ (3)

$\hat{B}_3 = 2\hat{\omega} - \left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2\right)$, (γιατί $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{\omega}$)

$\hat{B}_3 = 2\hat{\omega} - \left(90 - \hat{\omega}\right)$, (γιατί $B\hat{O}\Gamma = 90^o$)

$\hat{B}_3 = 3\hat{\omega} - 90$ (4)

Από τις σχέσεις (3) και (4)

συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_2 = \hat{B}_3$.

Άρα ΒΜ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΔ.

ii) Στο τρίγωνο ΒΛΝ, ΒΟ διχοτόμος και ύψος, άρα και διάμεσος . Άρα ΟΛ=ΟΝ.

ΝΟ μεσοκάθετος του ΒΜ. Οπότε ΒΟ = ΟΜ.

Άρα το τετράπλευρο ΒΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

iii)

- Μ μέσο της ΑΓ
- ΜΡ // ΑΒ επειδή ΜΝ // ΛΒ (ΒΛΜΝ ρόμβος).

Επομένως Ρ είναι μέσο της ΒΓ.

Στο τρίγωνο ΜΒΓ ΜΡ, ΓΟ είναι διάμεσοι και Ν το βαρύκεντρο.

Επομένως ΒΔ είναι η τρίτη διάμεσος του ΜΒΓ.

Άρα Δ μέσο της ΜΓ.