ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2009

ΤΑΞΗ Α΄ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Έστω ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{\alpha}\chi^2 + 2\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}\chi + \gamma=0\ , \quad \alpha(\beta+\alpha)\neq 0$$

έχει μια διπλή ρίζα ρ. Να δείξετε ότι ισχύει μία τουλάχιστον από τις δύο ισότητες :

$$|\rho|=|\beta|\ ,\ |\rho|=|\gamma|$$

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ . Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΔΒ που τέμνει την ΑΔ στο Ζ . Έστω Ε το σημείο τομής των ΔΚ και ΓΖ . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΒΕ τριχοτομούν την ΔΓ .

ΤΑΞΗ Α΄ **ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Δίνεται ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{\alpha}\chi^2 + 2\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}\chi + \gamma=0\ , \quad \alpha(\beta+\alpha)\neq 0$$

έχει μια διπλή ρίζα ρ. Άρα Δ=0 $\Leftrightarrow 4\left(\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}\right)^2 - 4\frac{1}{\alpha}\gamma=0$

$\Leftrightarrow(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)\alpha-\gamma(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)=0$

$\Leftrightarrow \beta^2\alpha+2\beta\gamma\alpha+\gamma^2\alpha-\gamma\beta^2-2\beta\alpha\gamma-\alpha^2\gamma=0$

$\Leftrightarrow \beta^2\alpha+\gamma^2\alpha-\gamma\beta^2-\alpha^2\gamma=0$

$\Leftrightarrow \beta^2(\alpha-\gamma)-\alpha\gamma(\alpha-\gamma)=0$

$\Leftrightarrow (\beta^2-\alpha\gamma)(\alpha-\gamma)=0$

$\Leftrightarrow \beta^2-\alpha\gamma=0$ ή $\alpha-\gamma=0$

$\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\gamma$ ή $\alpha=\gamma$

Όμως $\rho^2=\rho\rho=\frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha}}\alpha\gamma$

- Έστω ότι $\beta^2=\alpha\gamma$.Τότε :
  $\rho^2=\alpha\gamma=\beta^2 \Leftrightarrow |\rho|=|\beta|$
- Έστω ότι $\alpha=\gamma$.Τότε:
  $\rho^2=\alpha\gamma \Leftrightarrow \rho^2=\gamma\gamma=\gamma^2 \Leftrightarrow |\rho|=|\gamma|$

2. $\left.\begin{matrix} \text{ΑΓ} // \text{ΔΚ} \\ \text{ΑΔ} // \text{ΓΚ} \end{matrix}\right\}\text{ΑΔΚΓ}$ παραλ/μο ,Γ μέσο του ΒΚ

$\left.\begin{matrix} \text{ΒΓ} // \text{ΔΖ} \\ \text{ΒΔ} // \text{ΓΖ} \end{matrix}\right\}\text{ΒΔΖΓ}$ παραλ/μο ,Δ μέσο του ΑΖ

ΔΖ=ΔΑ=ΓΚ άρα ΔΖΚΓ παραλ/μο

Ε μέσο των ΔΚ,ΓΖ

Στο τρίγωνο ΒΔΚ, ΔΓ,ΒΕ διάμεσοι , άρα Η βαρύκεντρο, οπότε: ΓΗ=$\frac{1}{3}$ΓΔ

Στο τρίγωνο ΑΖΓ, ΑΕ,ΓΔ διάμεσοι , άρα Θ βαρύκεντρο, οπότε: ΔΘ=$\frac{1}{3}$ΓΔ

Άρα ΔΘ=ΘΗ=ΗΓ=$\frac{1}{3}$ΓΔ