ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΜΝΗΜΗ ΒΑΣΙΛΗ ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΤΙΟΣ 2008

ΤΑΞΗ Α΄ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

1. Έστω ότι έχουμε $(1+\alpha)(1+\beta)=12$ και $\alpha\beta(\alpha+\beta)=30$ με $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.
Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:
$\chi^2-2\alpha\beta\chi-(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-1)=0$.

2. Θεωρούμε τα διαδοχικά τετράγωνα ΑΒΓΔ, ΒΓΕΖ και ΖΕΗΘ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ε ως προς το Ζ.
   I. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΗ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
   II. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta+\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Delta$ (σε μοίρες).

Α' Λυκείου

(1) $\Delta = 4\alpha^2\beta^2 + 4\left[(\alpha+\beta)^2-1\right] = 4\left[\alpha^2\beta^2 + (\alpha+\beta)^2-1\right] = 4(\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-1)$. (1)

$$\left.\begin{aligned}(1+\alpha)(1+\beta)&=12\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}1+\beta+\alpha+\alpha\beta&=12\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \begin{aligned}(\alpha+\beta)+\alpha\beta&=11.\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}$$

Τα $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-11\omega+30=0$

άρα $(\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=5)$ ή $(\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=6)$.

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε $\Delta=240>0$

άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες

Β' τρόπος

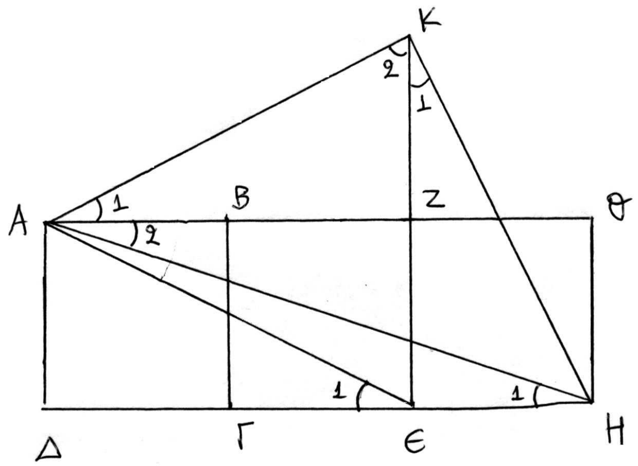
$$\left.\begin{aligned}(1+\alpha)(1+\beta)&=12\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\alpha\beta&=11\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}(\alpha+\beta+\alpha\beta)^2&=11^2\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2&=121.\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha\beta(\alpha+\beta)&=121\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta+2\cdot30&=121.\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta&=61.\\ \alpha\beta(\alpha+\beta)&=30\end{aligned}\right\}.$$

άρα $\Delta = 4(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta-1) = 4(61-1) = 240>0$.

Α' Λυκείου



i) $\overset{\triangle}{AKZ} = \overset{\triangle}{KEH}$ διότι i) ορθογώνια, ii) $AZ = KE$, iii) $KZ = EH$ $\Big\}$ $AK = KH$ (1), $\hat{A}_1 = \hat{K}_1$ (2)

$A\hat{K}H = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = \cancel{K_1}\ \hat{A}_1 + \hat{K}_2 = 90$ (3)

Λόγω των (1), (3) το $\overset{\triangle}{AKH}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

$A\hat{H}\Delta = \hat{H}_1 = \hat{A}_2$

$A\hat{E}\Delta = \hat{A}_1$ * $\Big\}$ $A\hat{H}\Delta + A\hat{E}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 45^\circ$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ είναι ίσα

$A\hat{E}\Delta =$ διότι στο $\overset{\triangle}{AEK}$ η AZ είναι διχοτόμος ως διάμεσος και ύψος